THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ
DES ANTILLES ET DE LA GUYANE

présentée par **Géraldine Pascaline**
sous la direction de Michel H. Geoffroy

Convergence de Fisher et H-differentiabilité des applications multivoques

soutenue publiquement le 8 décembre 2011
en vue de l'obtention du titre de
Docteur de l'Université des Antilles et de la Guyane

spécialité Mathématiques

Membres du jury :

ARIS DANIILIDIS, Pr. Université Autonome de Barcelone	Rapporteur
SAMIR ADLY, Pr. Université de Limoges	Rapporteur
ALAIN PIÉTRUS, Pr. Université des Antilles et de la Guyane	Examinateur
MICHEL H. GEOFFROY, Pr. Université des Antilles et de la Guyane	Examinateur

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ
DES ANTILLES ET DE LA GUYANE

présentée par **Géraldine Pascaline**
sous la direction de Michel H. Geoffroy

Convergence de Fisher et H-differentiabilité des applications multivoques

Mots clés : Inclusions variationnelles, Convergence de Fisher,
H-Différentiabilité, Points fixes,
Forward-backward splitting

Remerciements

En premier lieu, je remercie le Conseil Régional de la Martinique pour le soutien financier qu'il m'a accordé et qui m'a permis de me consacrer principalement à mes travaux de recherche et à mes activités universitaires.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à Messieurs les Professeurs Aris Daniilidis et Samir Adly pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et également à Monsieur le Professeur Alain Piétrus pour sa participation au jury.

Ensuite, mes remerciements vont à la communauté de l'Université des Antilles et de la Guyane. C'est un environnement dans lequel j'ai évolué depuis ma plus tendre enfance. Beaucoup m'ont vu passer de la petite fille qui suivait sa mère le long des couloirs et à travers différents bureaux, à l'étudiante un peu fêtarde qui ne savait pas trop ce qu'elle voulait, pour enfin apprendre à connaître celle que je suis devenue.
Je remercie en particulier le personnel de l'Administration de la Faculté des Sciences Exactes et Naturelles du campus de Fouillole, toujours présent pour me remotiver et me fournir tous les renseignements et documents dont j'ai pu avoir besoin (un clin d'œil particulier à Mesdames Behary, Rousseau et Cyrille), l'ensemble des membres du Département de Mathématiques et Informatique qui ont su être à mon écoute en toutes circonstances, et l'Association des Jeunes Chercheurs en Guadeloupe (Sabin pour sa présence et son amitié, Michaël pour ses précieux conseils et son aide non négligeable à l'élaboration de mon manuscrit, Célia et Mathias pour leur soutien moral, ainsi que tous les autres). Je n'oublie pas, Monsieur le Professeur Robert Janin, sans lequel je n'aurais jamais eu l'idée de commencer une thèse de Doctorat.
Je tiens, surtout, à exprimer toute ma gratitude, toute ma reconnaissance et tout

mon respect à mon Directeur de thèse, Monsieur le Professeur Michel H. Geoffroy, sans lequel je n'aurais jamais touché, même du bout des doigts, au domaine de la recherche. J'ai toujours pensé que mon parcours universitaire s'arrêterait à la maîtrise, et c'est grâce à lui si je me suis inscrite en Master 2. C'est aussi grâce à lui si je produis cette thèse, car il a été là au moment où j'avais besoin de lui. Il m'a soutenu sans failles et avec beaucoup de compréhension en dépit de ses nombreuses et importantes activités et obligations au sein de notre Université. Je ne l'en remercierai jamais assez.

Un grand remerciement également à mes amis, ils se reconnaîtront, eux qui ont toujours cru en moi et ont toujours cherché à me pousser vers la réussite, même si bien souvent ils ne comprenaient pas grand-chose à ce que je faisais. Grâce à eux j'ai toujours pu garder un équilibre de vie et un mental d'acier.

En dernier lieu, je tiens à remercier ma famille, qui plus que quiconque m'a régulièrement manifestée sont entière confiance et m'a stimulée afin de viser l'excellence. Une pensée émue pour ma mamie Malouse, mon papi Albert et ma tatie Catherine qui, j'en suis sûre, seraient très heureux et fiers de partager ce moment avec moi, même si je ne doute pas que là où ils se trouvent, ils n'ont cessé de me communiquer la force et le courage de réussir. Un grand merci à mon père, ce héros, et enfin, un merci spécifique à ma mère, mon modèle, ma force, ma vie, sans elle je ne serais pas qui je suis et encore moins où je suis.
Ce travail c'est pour toi maman.

Table des matières

Notations

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ est l'ensemble des nombres entiers.

$\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des nombres entiers strictement positifs.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

X, Y sont des espaces de Banach.

X^* désigne le dual topologique de X.

$(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire.

$\mathcal{L}(X, Y)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

$\mathcal{F}(X, Y)$ désigne l'espace des applications multivoques à valeurs fermées de X dans Y.

$\mathcal{H}(X, Y)$ désigne l'espace des applications multivoques positivement homogènes de X dans Y.

$\| \cdot \|$ est une norme sur X ou Y.

(X, d) désigne un espace métrique où d est la distance associée.

$\mathrm{d}(x, B) := \inf\limits_{b \in B} \| x - b \|$ est la distance entre x et l'ensemble B.

$e(A, B) := \sup\limits_{x \in A} \mathrm{d}(x, B)$ désigne l'excès de l'ensemble A à l'ensemble B.

$h(A, B) := \max\{e(A, B), e(B, A)\}$ désigne la distance de Hausdorff entre A et B.

$\mathbb{B}_X := \{x \in X \mid \| x \| < 1\}$ désigne la boule unité ouverte de X.

$\mathbb{B}_r(\overline{x}) := \{x \in X \mid \| x - \overline{x} \| < r\}$ désigne la boule ouverte de centre $\overline{x}$ et de rayon r.

$F : X \rightrightarrows Y$ désigne une application multivoque de X dans Y.

$F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ désigne l'inverse de F, définie par $x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x)$.

$\operatorname{gph} F := \{(x, y) \in X \times Y \mid \ y \in F(x)\}$ désigne le graphe de F.

$\operatorname{dom} F := \{x \in X \mid \ F(x) \neq \emptyset\}$ désigne le domaine de F.

$\operatorname{Im} F := \{y \in F(x) \mid \ x \in \operatorname{dom} f\}$ désigne l'image de F.

Introduction

Selon Jean-Pierre Aubin et Hélène Frankowska, (voir leur monographie "Set-valued analysis" [8]), l'analyse multivoque est utile à tous.
L'analyse multivoque c'est l'étude des propriétés des applications multivaluées, autrement dit les applications dont l'image est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. L'intérêt pour ce type d'applications vient du fait que beaucoup de problèmes sont considérés comme mal posés, c'est-à-dire que l'existence, l'unicité et la dépendance par rapport aux données de la solution n'est pas assurée, par opposition à la définition de problèmes bien posés au sens d'Hadamard. Le besoin de l'analyse multivoque s'est ainsi fait sentir pour la résolution de nombreux problèmes émergents dans divers domaines comme : la théorie du contrôle, l'économie, la gestion, la biologie, les sciences des systèmes et l'intelligence artificielle, etc. Les fonctions multivaluées servent aussi en combinatoire, théorie des graphes, théorie des jeux ...

Dans cette thèse nous introduisons d'abord un nouveau concept de différentiation pour les applications multivoques, la H-différentiabilité, proposé très récemment par Pang [73] et inspiré des prédérivées de Ioffe [52] pour les applications univoques. Après avoir adapté un concept de convergence d'ensembles au sens de Fisher, aux applications multivoques, nous étudions la stabilité de la H-différentiabilité. Pour ce faire, nous considérons deux suites (T_n) et (H_n) d'applications multivoques définies de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$, respectivement à valeurs fermées et positivement homogènes et ayant pour limites respectives T et H. Nous cherchons alors à savoir si le fait que les applications T_n soient (strictement) H_n-différentiables en un point donné implique que l'application T soit (strictement) H-différentiable en ce point.

Nous avons ensuite choisi d'aborder deux thématiques distinctes :
- L'étude de la dépendance des ensembles de points fixes d'une application multivoque par rapport aux données.
- L'étude de la convergence d'une méthode d'approximations successives pour la somme de deux opérateurs multivoques non monotones.

Dans le premier cas il s'agit de savoir si l'ensemble des solutions de

$$x \in T_n(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

où (T_n) est une suite d'applications multivoques définies d'un espace de Banach X dans lui même, converge vers l'ensemble des solutions de

$$x \in T(x), \quad x \in X, \tag{2}$$

où T est la limite de la suite (T_n).
Les études sur le comportement des ensembles de points fixes sont moins nombreuses que celles sur l'existence de ces points fixes mais on peut quand même citer les travaux de Lim [60], Markin [64, 65] et Papageorgiou [74]. Ces études permettent par exemple de décrire la dépendance des solutions des inclusions différentielles, des équations différentielles généralisées ou des équations aux dérivées partielles, par rapport à des paramètres ou des données bornées.

Dans le second cas, nous nous intéressons à la convergence d'une méthode numérique pour la résolution de l'inclusion

$$\bar{p} \in (T_1 + T_2)(x), \quad x \in X, \tag{3}$$

où T_1 et T_2 sont des applications multivoques définies d'un espace de Banach X dans lui même et $\bar{p}$ un paramètre.
Dans la littérature ([15, 22, 37, 49, 53, 58, 63, 71, 72]), les techniques de résolution de ces inclusions ont souvent été menées dans un cadre où les applications multivoques ont des propriétés de monotonie, plus précisément de maximale monotonie. L'une des méthodes les plus connues pour résoudre ce type d'inclusions est celle du

point proximal introduite en 1970 par Martinet (voir [66]), et rendue célèbre par Rockafellar en 1976 dans [87]. Dans cette thèse, nous nous plaçons dans un cadre non monotone. Les applications multivoques que nous considérons ont des propriétés de H-différentiabilité et de type Lipschitz, ou encore de régularité métrique, hypothèses parfois plus faciles à obtenir que celles de maximale monotonie. Différentes méthodes itératives de résolution d'inclusions variationnelles dans le cadre non monotone ont été proposées ces dernières années notamment dans [1, 17, 34, 39, 41, 42, 51, 59]. Citons par exemple la méthode de la sécante, la méthode de Newton, la méthode de type Mann ou encore la méthode d'Hummel-Seebeck qui sont presque toutes étudiées dans la thèse de C. Jean-Alexis [56].
L'étude de la convergence de méthodes numériques pour la somme de deux opérateurs n'est pas nouvelle non plus, mais elle a principalement été traitée dans le cadre monotone (voir par exemple [47, 62]). Nous nous proposons donc dans ces travaux d'étendre ce travail aux applications jouissant de propriétés de différentiabilité ou encore de régularité métrique.

Les problèmes (1), (2) et (3) sont appelés des inclusions variationnelles. Les inclusions variationnelles permettent de modéliser un grand nombre de problèmes mathématiques tels que les inégalités variationnelles, les systèmes d'équations non linéaires, les problèmes d'optimisation ou encore les problèmes d'équilibre. On en retrouve donc des applications pratiques en économie, en physique, en ingénierie, etc. Pour plus de détails sur les inclusions variationnelles et leurs applications, le lecteur pourra se référer à [31], [32], ainsi qu'à la thèse de M. Gaydu [39].

Cette thèse s'articule en quatre grandes parties :
- Afin de bien comprendre l'univers dans lequel nous travaillons, le premier chapitre est consacré aux fonctions qui nous intéressent dans ces travaux, à savoir les applications multivoques. Nous y détaillons les définitions de base de ces applications, ainsi que leurs propriétés de type Lipschitz et de régularité métrique.
- Le deuxième chapitre concerne la différentiabilité généralisée. Nous y présentons dans un premier temps diverses notions de différentiation des applications univoques et multivoques présentes dans la littérature, puis nous y introduisons la

H-différentiabilité pour les applications multivoques. Dans un deuxième temps nous donnons la définition de la notion de convergence nécessaire à l'étude de la stabilité de la H-différentiabilité évoquée précedemment : la convergence de Fisher pour les applications multivoques.
- Dans le troisième chapitre, après avoir présenté l'état de l'art, nous étudions la stabilité des ensembles des points fixes d'applications multivoques contractantes en considérant la convergence de Fisher.
- Le dernier chapitre est dédié aux approximations successives des zéros de la somme de deux opérateurs non monotones. Cette thématique ayant déjà fait l'objet de plusieurs travaux, nous présentons quelques un des résultats les plus significatifs déjà établis dans le cadre monotone, puis nous parlons des méthodes de splitting, en particulier de celle que nous avons choisis d'utiliser : le forward-backward splitting, et des outils nécessaires pour l'élaboration de nos résultats. Enfin, nous clôturons ce dernier chapitre avec nos résultats de convergence de la méthode de forward-backward splitting sous des conditions de pseudo H-différentiabilité stricte, puis sous des conditions de pseudo H-différentiabilté extérieure, et nous présentons quelques applications.

Chapitre 1

Généralités sur les applications multivoques

Comme nous l'avons dit précédemment, nous nous intéressons dans cette thèse aux applications dites multivoques. Ce sont des applications dont les images ne sont pas nécessairement des points comme en analyse classique, mais des ensembles. Dans ce chapitre nous allons présenter quelques définitions et propriétés relatives à ces fonctions.

1.1 Applications multivoques

Définition 1.1.1. *Soient X et Y deux espaces métriques. Une* application multivoque *F définie sur X et à valeurs dans Y est caractérisée par son graphe noté* $\operatorname{gph} F$ *qui est un sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$\operatorname{gph} F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

On dit que l'ensemble $F(x)$ est l'image de x par F.

Une application multivoque F est dite *non triviale* si son graphe est non vide, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $F(x)$ soit non vide.

Dans la littérature, ces applications sont aussi appelées multi-applications, fonctions multivaluées, multifonctions ou encore correspondances.

Remarquons qu'une application univoque est aussi une application multivoque puisque pour $x \in X$ le singleton $f(x) = \{y\}$ est un sous-ensemble de Y.

Une application multivoque définie sur X et à valeurs dans les sous-ensembles de Y sera notée $F : X \to 2^Y$, ou encore $F : X \rightrightarrows Y$ pour faire la différence avec la notation usuelle des applications univoques.

Afin de bien travailler dans le cadre de l'analyse multivoque, énonçons maintenant quelques définitions et caractéristiques propres aux applications multivoques. Considérons X et Y deux espaces de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque.

Définition 1.1.2. *Le* domaine de F *est l'ensemble des éléments de* X *dont l'image par* F *est un sous-ensemble non vide de* Y*. Autrement dit,*

$$\operatorname{dom} F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

L'application F est dite *stricte* si pour tout $x \in X$, l'ensemble $F(x)$ est non vide.

Définition 1.1.3. *L'*image *de* F *est la réunion des valeurs* $F(x)$ *lorsque* x *parcourt* X*. Cet ensemble se définit par*

$$\operatorname{Im} F = \bigcup_{x \in X} F(x) = \{y \in Y \mid \exists\ x \ \textit{tel que}\ y \in F(x)\}.$$

Définition 1.1.4. *L'*inverse *de* F *est l'application* $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ *définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \operatorname{gph} F.$$

On a donc $\operatorname{dom} F^{-1} = F(X)$ et $F^{-1}(Y) = \operatorname{dom} F$.

Si K est un sous-ensemble de X, on notera par $F_{|K}$ la restriction de F sur K, définie par :

$$F_{|K}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in K; \\ \emptyset & \text{sinon }. \end{cases}$$

On a $\operatorname{dom} F_{|K} = \operatorname{dom} F \cap K$.

Maintenant que nous avons rappelé certaines définitions propres à l'analyse multivoque, nous allons aborder dans la partie suivante, les notions d'applications multivoques lipchitziennes, ainsi que les notions dites de régularité métrique.

1.2 Propriétés de type Lipschitz et de régularité métrique des applications multivoques

Avant de présenter les différentes propriétés lipschitziennes et de régularité relatives aux applications multivoques nous allons rappeler quelques définitions utiles pour la suite.

La *distance* d'un point x à un ensemble A est la quantité

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Par convention, $d(x, \emptyset) = +\infty$. Si au contraire, A est non vide, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $y \in A$ tel que $\|x - y\| \leq d(x, A) + \varepsilon$.

Comme nous travaillons dans le cadre de l'analyse multivoque, les images des applications considérées sont des ensembles. Afin d'évaluer le caractère lipschitz et la régularité des applications multivoques, nous avons donc besoin d'une notion de "distance" entre deux ensembles. Une notion de ce type, appelée excès, a été proposée par Pompeiu dans [79]. Dans cette thèse, nous allons également utiliser la distance de Hausdorff [48] construite à partir de l'excès.

Définition 1.2.1. *L'*excès *d'un ensemble A à un ensemble B est*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Notons qu'en général $e(A, B) \neq e(B, A)$. De plus, par convention $e(\emptyset, \emptyset) = +\infty$ et si B est un ensemble non vide on a $e(\emptyset, B) = 0$.

L'autre notion de distance dont nous aurons besoin est celle de Hausdorff. La distance de Hausdorff entre deux ensembles A et B, correspond au maximum entre $e(A, B)$ et $e(B, A)$.

Définition 1.2.2 (Distance de Hausdorff)**.** *Soit A et B deux sous-ensembles fermés et non vides de X.* La distance de Hausdorff *(ou distance de Pompieu-Hausdorff) entre A et B est définie par*

$$h(A, B) = \inf\{\eta \geq 0 \,|\, A \subset B + \eta\mathbb{B}, B \subset A + \eta\mathbb{B}\}.$$

En termes d'excès :

$$h(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Remarquons que la distance de Hausdorff est une distance sur les sous-ensembles compacts de X.

Nous allons maintenant spécifier différentes propriétés de type Lipschitz et de régularité des applications multivoques. Chaque propriété de type Lipschitz d'une application correspondant à une propriété de régularité métrique de son application inverse, nous allons également présenter les liens d'équivalences et de hiérarchie entre ces différentes notions. Pour plus de détails sur cette partie, le lecteur peut se référer au récent ouvrage, très complet, de Dontchev et Rockafellar "Implicit Functions and Solution Mappings" [29].

La première définition que nous allons présenter, est celle d'une application multivoque lipschitzienne.

Définition 1.2.3. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ sera dite* lipschitzienne *s'il existe $\kappa \geq 0$ tel que*

$$F(x) \subset \mathbb{B}_{\kappa\|x-x'\|}(F(x')), \;\; \forall x, x' \in X,$$

où $\mathbb{B}_{\kappa\|x-x'\|}(F(x')) := \{y \in Y | d(y, F(x')) \leq \kappa\|x - x'\|\}$.

Précisons également ce qu'est une application multivoque lipschitzienne relativement à un sous-ensemble.

Définition 1.2.4. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ sera dite* lipschitzienne relativement à un ensemble $D \subset X$ *si* $D \subset \operatorname{dom} F$, F *est à valeurs fermées dans* D *et s'il existe* $\kappa \geq 0$ *tel que*

$$F(x) \subset F(x') + \kappa \|x - x'\| \mathbb{B}, \quad \forall x, x' \in D. \tag{1.1}$$

L'inclusion (1.1) peut être réécrite en termes de distance d'un point à un ensemble :

$$d(y, F(x)) \leq \kappa d(x, F^{-1}(y)), \quad \forall y \in Y, \forall x \in D,$$

ou encore avec la distance de Hausdorff :

$$h(F(x), F(x')) \leq \kappa \|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in D.$$

La définition suivante a été introduite en 1984 par Aubin dans l'article [7] sous le nom d'application multivoque pseudo-lipschitzienne. Elle a ensuite été renommée propriété d'Aubin (comme nous avons choisi de la nommer ici), voir par exemple Dontchev et Rockafellar en 1996 dans la publication [27]. Dans la littérature cette notion est aussi connue sous le nom d'Aubin continuité ou de continuité lipschitz ([27, 88]).

Définition 1.2.5. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ a la propriété d'Aubin en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ si $\overline{y} \in F(\overline{x})$ et s'il existe $\kappa \in [0, \infty)$ et des voisinages U de $\overline{x}$, V de $\overline{y}$ tels que*

$$F(x) \cap V \subset F(x') + \kappa \|x - x'\| \mathbb{B} \quad \forall x, x' \in U. \tag{1.2}$$

En termes d'excès, l'inclusion (1.2) peut être réécrite de la façon suivante :

$$e(F(x) \cap V, F(x')) \leq \kappa \parallel x - x' \parallel . \tag{1.3}$$

Définition 1.2.6. *L'infimum des κ pour lesquels l'inclusion* (1.2) *est vérifiée est le module de Lipschitz de F en $(\bar{x}, \bar{y})$, on le note* $\operatorname{Lip}(F; \overline{x} \mid \overline{y})$.

Expliquons aussi ce qu'est une application multivoque lipschitzienne extérieurement. Ce concept a d'abord été introduit en 1981 par Robinson [83] sous le terme d'application multivoque lipschitzienne supérieurement, avant qu'il ne le rebaptise application multivoque lipschitzienne extérieurement, en 2007 dans [84].

Définition 1.2.7. *L'application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite lipschitzienne extérieurement en $\overline{x}$ relativement à un ensemble D si $\overline{x} \in D \subset Dom\, F$, $F(\overline{x})$ est un ensemble fermé et s'il existe une constante $\kappa \geq 0$ et un voisinage U de $\overline{x}$ tels que*

$$F(x) \subset F(\overline{x}) + \kappa \|x - \overline{x}\| \mathbb{B}$$

pour tout $x \in U \cap D$, ou de façon équivalente

$$e(F(x), F(\overline{x})) \leq \kappa \|x - \overline{x}\|$$

pour tout $x \in U \cap D$.

En fixant $\bar{x}$ dans la Définition 1.2.5, on définit une quatrième notion de type Lipschitz des applications multivoques, la notion d'applications multivoques calmes.

Définition 1.2.8. *Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite calme en $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$ s'il existe une constante positive κ et des voisinages U de $\overline{x}$ et V de $\overline{y}$, tels que*

$$F(x) \cap V \subset F(\bar{x}) + \kappa \|x - \bar{x}\| I\!\!B, \ \ \forall x \in U. \tag{1.4}$$

En terme d'excès l'inclusion (1.4) peut se réécrire :

$$e(F(x) \cap V, F(\overline{x})) \leq \kappa \parallel x - \overline{x} \parallel, \ \ \forall x \in U.$$

L'infimum de tous les κ, tels que l'inégalité précédente soit vérifiée, est appelé *module du caractère calme* de F en $(\bar{x}, \bar{y})$ et est noté $\operatorname{clm}(F; \overline{x} \mid \overline{y})$.

Il est clair qu'une application ayant la propriété d'Aubin est une application calme.

A partir de la définition d'une application calme, on peut introduire une dernière notion, celle d'une application *isolément calme.*
Définissons au préalable la notion de *localisation graphique* d'une application en un point.

Définition 1.2.9. *(Localisation graphique) Considérons une application multivoque* $F : X \rightrightarrows Y$ *et un couple* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$*. On dit que l'application* $\tilde{F} : X \rightrightarrows Y$ *est une localisation graphique de* F *en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{y}$ *s'il existe des voisinages* U *de* $\overline{x}$ *et* V *de* $\overline{y}$ *tels que* $\operatorname{gph} \tilde{F} = \operatorname{gph} F \cap (U \times V)$*, de sorte que*

$$\tilde{F} : x \mapsto \begin{cases} F(x) \cap V & \textit{quand } x \in U, \\ \emptyset & \textit{sinon.} \end{cases}$$

L'application inverse de $\tilde{F}$ *vérifie alors*

$$\tilde{F}^{-1}(y) = \begin{cases} F^{-1}(x) \cap U & \textit{quand } y \in V, \\ \emptyset & \textit{sinon,} \end{cases}$$

et est ainsi une localisation graphique de l'application F^{-1} *en* $\bar{y}$ *pour* $\bar{x}$*.*

A partir de cela, nous pouvons définir le concept d'application multivoque isolément calme.

Définition 1.2.10. *Une application* $F : X \rightrightarrows Y$ *est dite isolément calme en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{y}$ *si, d'une part, elle est calme et si, d'autre part, elle a une localisation graphique en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{y}$ *qui est univoque en* $\bar{x}$ *et égale à* $\{\bar{y}\}$ *en ce point. En d'autres termes, cela revient à dire qu'il existe une constante* $\kappa \in [0, \infty)$*, et des voisinages* U *de* $\bar{x}$ *et* V *de* $\bar{y}$ *tels que*

$$F(x) \cap V \subset \bar{y} + \kappa \|x - \bar{x}\| \mathbb{B} \quad \textit{pour tout } x \in U.$$

Cette notion est bien évidemment plus forte que celle définie précédemment dans la Définition 1.2.8.

Les propriétés de type Lipschitz pour les applications multivoques que nous venons de définir ont des équivalents en terme de régularité métrique de l'inverse de ces applications. La régularité métrique est une propriété quantitative des applications en analyse variationnelle. Ce concept est présent implicitement dans le théorème de l'application ouverte de Banach établi au début des années 1930 (voir [10]). En voici la définition :

Définition 1.2.11. *(Régularité Métrique) L'application $F : X \rightrightarrows Y$ est métriquement régulière en $\bar{x}$ pour $\overline{y}$ si $\overline{y} \in F(\overline{x})$ et s'il existe $\kappa \in [0, \infty)$, ainsi que des voisinages U de $\overline{x}$ et V de $\overline{y}$, tels que :*

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq \kappa d(y, F(x)) \;\; \forall (x, y) \in U \times V. \tag{1.5}$$

Définition 1.2.12. *(Module de régularité métrique) L'infimum de tous les κ pour lesquels l'inégalité* (1.5) *est vérifiée s'appelle le module de régularité métrique de F en $(\bar{x}, \bar{y})$ et se note* $\operatorname{reg}(F; \overline{x} \mid \overline{y})$. *Plus précisément :*

$$\operatorname{reg}(F; \overline{x} \mid \overline{y}) := \inf\{\kappa \in [0, \infty) \mid \exists U,\ \exists V \;\; \textit{tels que } (1.5) \textit{ soit vérifiée } \}.$$

L'application F est métriquement régulière en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ si et seulement si $\operatorname{reg}(F; \overline{x} | \overline{y}) < +\infty$.

Pour une application multivoque F quelconque, la régularité métrique fournit une estimation de la distance d'un point x à l'ensemble des solutions de l'inclusion $F(x) \ni y$ (pour un point y donné) en termes de "résidu" $d(y, F(x))$. Plus précisément, soit $\bar{x}$ une solution de l'inclusion $\bar{y} \in F(x)$, avec F métriquement régulière en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, et soit x_a et y_a des approximations respectivement de $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Alors par l'inégalité (1.5), la distance du point x_a à l'ensemble des solutions de l'inclusion $y_a \in F(x)$ est bornée par la constante κ fois le résidu $d(y_a, F(x_a))$. Dans la pratique, le résidu est typiquement facile à calculer ou à estimer, alors que trouver une solution peut s'avérer beaucoup plus compliqué.

Le théorème suivant, prouvé par exemple dans [13, 69, 77], nous apprend que dire qu'une application multivoque est Aubin continue équivaut à dire que son inverse est métriquement régulière.

Théorème 1.2.13. *Une application $F : X \rightrightarrows Y$ a la propriété d'Aubin en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ si et seulement si $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ est métriquement régulière en $\overline{y}$ pour $\overline{x}$.*
De plus, $\operatorname{Lip}(F; \overline{x} \mid \overline{y}) = \operatorname{reg}(F^{-1}; \overline{y} \mid \overline{x})$.

De même que la propriété d'Aubin peut être caractérisée par la régularité métrique de son inverse, il y a également une équivalence entre une application calme et la sous-régularité métrique de son inverse. La sous régularité métrique étant une notion dérivée de celle de régularité métrique. Présentons d'abord cette définition.

Définition 1.2.14. *(Sous-Régulatité métrique) Une application* $F : X \rightrightarrows Y$ *est métriquement sous-régulière en* $\overline{x}$ *pour* $\overline{y}$ *si* $\overline{y} \in F(\overline{x})$ *et s'il existe* $\kappa \in [0, \infty)$ *et des voisinages* U *de* $\overline{x}$, V *de* $\overline{y}$ *tels que*

$$d(x, F^{-1}(\overline{y})) \leq \kappa d(\overline{y}, F(x) \cap V) \quad \forall x \in U. \tag{1.6}$$

Notons que dans [2, Remarque 3.4], il a été observé que le voisinage V de l'inégalité (1.6) pouvait être omis.

L'infimum des κ pour lesquels l'inégalité précédente est vérifiée est le module de sous-régularité métrique de F en $(\bar{x}, \bar{y})$. On le note $\mathrm{subreg}(F; \overline{x} \mid \overline{y})$ et on a $\mathrm{subreg}(F; \overline{x} \mid \overline{y}) \leq \mathrm{reg}(F; \overline{x} \mid \overline{y})$. Comme pour la régularité métrique, une application qui n'est pas métriquement sous-régulière est caractérisée par $\mathrm{subreg}(F; \bar{x} \mid \bar{y}) = +\infty$.

Présentons alors le résultat suivant dont on pourra trouver une démonstration dans [28] ou dans [29].

Théorème 1.2.15. *Une application multivoque* $F : X \rightrightarrows Y$ *est calme en* $\overline{x}$ *pour* $\overline{y}$ *si et seulement si son application inverse* $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ *est métriquement sous-régulière en* $\overline{y}$ *pour* $\overline{x}$. *De plus,* $\mathrm{clm}(F; \overline{x}; \overline{y}) = \mathrm{subreg}(F^{-1}; \overline{y} \mid \overline{x})$.

Le théorème qui suit donne une caractérisation d'une application isolément calme par la sous régularité métrique forte de son inverse. Rappelons d'abord la définition de ce concept étudié dans [28].

Définition 1.2.16. *(Sous-Régularité métrique forte) Une application multivoque* $F : X \rightrightarrows Y$ *est fortement métriquement sous-régulière en* $\overline{x}$ *pour* $\overline{y}$, *si* $\overline{y} \in F(\overline{x})$ *et s'il existe* $\kappa \in [0, \infty)$ *et des voisinages* U *de* $\overline{x}$, V *de* $\overline{y}$, *tels que*

$$\| x - \overline{x} \| \leq \kappa d(\overline{y}, F(x) \cap V) \qquad \forall x \in U. \tag{1.7}$$

De manière équivalente, on peut définir une application fortement métriquement sous régulière de la façon suivante :
F est fortement métriquement sous-régulière en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ si elle est métriquement sous-régulière en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ et s'il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que la localisation graphique $V \ni y \mapsto F^{-1}(y) \cap U$ soit univoque en $\bar{y}$ et égale à $\{\bar{x}\}$ en ce point.
La sous régularité métrique forte est donc clairement une notion plus forte que celle de la sous régularité métrique.

On a alors le résultat suivant (voir par exemple [28] et [29]).

Théorème 1.2.17. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est isolément calme en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ si et seulement si F^{-1} est fortement métriquement sous-régulière en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$.*

Il n'y a pas de relation d'implication entre la régularité métrique et la sous-régularité métrique forte, en effet, il existe des applications qui sont métriquement régulières en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ mais non fortement métriquement sous-régulières en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$, et inversement.

Enfin, donnons une caractérisation d'une application multivoque lipschitzienne dans un voisinage du point de référence, en terme de régularité métrique forte de son inverse (démontré par exemple dans [29]).
On rappelle d'abord la définition d'une application fortement métriquement régulière.

Définition 1.2.18 (Régularité métrique forte)**.** *Une application est fortement métriquement régulière, ou plus simplement fortement régulière, en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ dans* $\operatorname{gph} F$ *si la relation* (1.5) *est vérifiée et si de plus l'application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ admet une localisation graphique univoque en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$.*

Il est clair que la régularité métrique forte implique la régularité métrique.

Énonçons alors le théorème liant ces deux propriétés.

Théorème 1.2.19. *L'application $F : X \rightrightarrows Y$ est fortement métriquement régulière en $\overline{x}$ pour $\overline{y}$ de constante κ si et seulement si $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ admet une localisation graphique univoque κ-lipschitzienne en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$.*

Pour plus de détails sur les avancées autour de la régularité métrique et ses applications aux problèmes variationnels, voir [54, 26, 28] et le livre [88].

Nous savons maintenant que les propriétés de type Lipschitz des applications multivoques sont étroitement liées à leurs propriétés de régularité métrique. Afin de clôturer ce chapitre nous proposons un schéma récapitulatif permettant de mieux visualiser les équivalences et liens hiérarchiques entre toutes ces définitions.

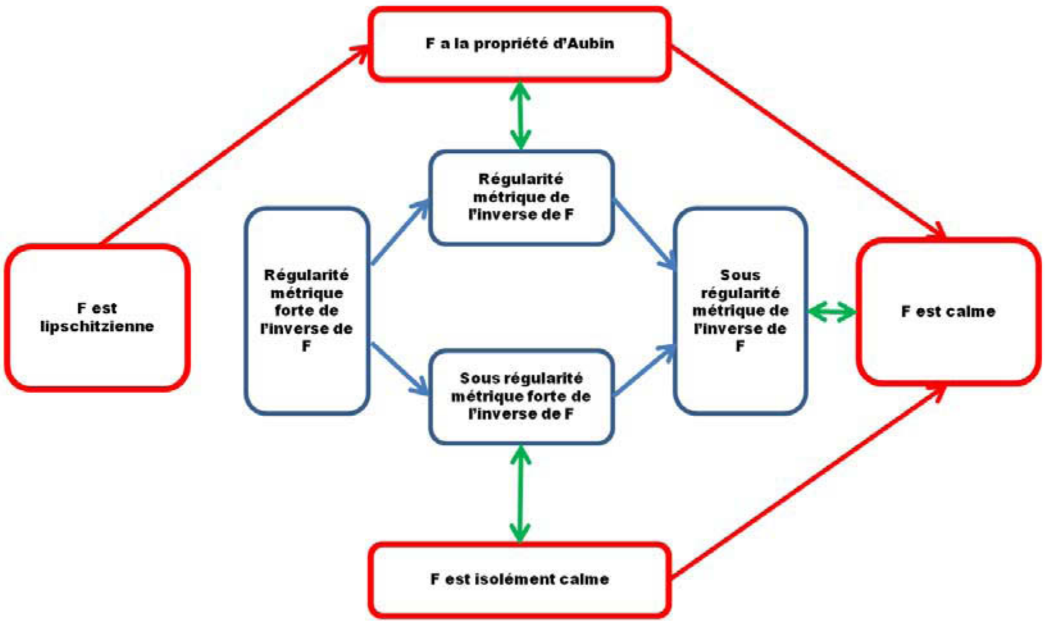

FIG. 1.1 – Relations entre les notions de type Lipschitz et de régularité métrique.

Après avoir énuméré ces différentes notions et bien compris les relations entre elles, intéressons-nous à la différentiabilité des applications multivoques dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Stabilité de la H-différentiabilité généralisée

Le but de ce chapitre est d'étudier la stabilité de la H-différentiabilité, nouveau concept de différentiation généralisée pour les applications multivoques, introduit par Pang en 2009 (voir [73]). Cette problématique relative à la stabilité d'opérateurs de différentiation a été largement étudiée ces dernières années par plusieurs auteurs pour des concepts différents de dérivées, voir par exemple [4, 8, 13, 21, 23, 43]. Dans le cas d'une suite d'applications univoques différentiables (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, nous savons que si (f_n) converge vers une application f, et que la suite des dérivées (f'_n), des applications f_n converge uniformément vers une fonction g, alors f est différentiable et on a $f' = g$. Dans cette partie nous chercherons donc à étendre ce résultat aux applications multivoques ayant des propriétés de H-différentiabilité en considérant deux suites (T_n) et (H_n) d'applications multivoques définies de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$, respectivement à valeurs fermées et positivement homogènes et ayant pour limites respectives T et H, et en montrant que si les applications T_n sont (strictement) H_n-différentiables en un point donné alors l'application T est (strictement) H-différentiable en ce point.

Pour notre étude de stabilité nous allons considérer une convergence variationnelle, plus précisément la convergence au sens de Fisher, que nous avons adaptée au cadre des applications multivoques. Pour parler de convergence il est bien évidemment

nécessaire d'utiliser une topologie adaptée, et il s'est avéré naturel de considérer la topologie proximale.
Les résultats de ce chapitre sont issus de l'article "Generalized differentiation and fixed points sets behaviors with respect to Fisher convergence" [44].

2.1 Différentiabilité généralisée

La différentiabilité généralisée joue un rôle central dans l'analyse variationnelle et dans ses applications. La notion de différentielle d'une application multivoque a été évoquée intensément dans les années 70, avec les travaux d'Aubin [5], ou ceux de Mordukhovich [68].
C'est ainsi que nous évoquerons la dérivée contingente proposée par Aubin [5, 6] utilisant le cône tangent, et la codérivée de Mordukhovich [68] utilisant le cône normal.
Mais dans un premier temps nous commençons par présenter quelques concepts de différentiablilité généralisée pour les applications univoques, qui ont contribué aux extensions au cadre multivoque que nous étudierons pas la suite.

2.1.1 Différentiabilité généralisée des applications univoques

La notion de différentiabilité généralisée qui nous intéresse dans cette thèse trouve sa motivation dans les travaux de Clarke [20], qui propose d'approcher une application localement lipschitzienne $f : X \to I\!R$ par un sous-ensemble convexe du dual X^* de X. C'est pour cela que nous choisissons ici de donner la définition introduite par Clarke, même si nous ne l'utiliserons pas pour nos résultats.

Rappel : On dit qu'une application $f : X \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne autour de $\bar{x}$ si il existe un voisinage V de $\bar{x}$ et un réel $k > 0$ tels que pour tous éléments $u, v \in V$, $\|f(u) - f(v)\| \leq k\|u - v\|$.

Définition 2.1.1 (Sous-différentiel de Clarke)**.** *Soit X un espace de Banach. Supposons que $f : X \to I\!R$ soit localement lipschitzienne autour de $\bar{x}$.*

La dérivée directionnelle généralisée de Clarke de f en $\bar{x}$ dans la direction $v \in X$ est définie par

$$f^\circ(\bar{x}; v) = \limsup_{t \downarrow 0, x \to \bar{x}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

avec $x \in X$ et t scalaire positif.
Le sous-différentiel de Clarke de f en $\bar{x}$, noté $\partial_C f(\bar{x})$, est le sous-ensemble convexe du dual X^* défini par

$$\{\zeta \in X^* | \ f^\circ(\bar{x}; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \quad \textit{pour tout} \quad v \in X\}.$$

En 1981, motivé par l'idée de trouver une extension satisfaisante aux travaux de Clarke pour des applications à valeurs dans des espaces de dimension infinie, Ioffe [52] a introduit une classe de prédérivées, prédérivées strictes et dérivées (au sens de la Définition 2.1.5 suivante), pour l'approximation locale des applications univoques non lisses (i.e., non différentiables), à l'aide d'applications multivoques positivement homogènes et à valeurs fermées.

Le point fondamental de cette nouvelle approche est que contrairement aux calculs classiques, ce n'est pas un seul objet que l'on considère comme dérivée mais plutôt un "filet" d'objets appelés prédérivées qui fournissent une bonne approximation de l'application univoque non lisse en un point donné.
La définition de ces prédérivées nécessite d'introduire dans un premier temps celle d'une application multivoque positivement homogène.

Rappelons d'abord qu'un cône C est un ensemble de vecteurs, contenant 0 et contenant tous les multiples positifs des éléments de C, c'est-à-dire que, $\forall v \in C$, $\lambda v \in C$ où λ est un réel strictement positif.

Définition 2.1.2. *Une application multivoque $H : X \rightrightarrows Y$ est dite positivement homogène si $H(0) \ni 0$ et si $H(\lambda x) = \lambda H(x)$ pour tout $x \in X$ et $\lambda > 0$.*

L'ensemble des applications multivoques positivement homogènes définies de X dans Y est noté $\mathcal{H}(X, Y)$.

Remarque 2.1.3. *L'application multivoque H est positivement homogène si et seulement si son graphe* gph(H) *est un cône.*

Remarque 2.1.4. *Si l'application multivoque H est positivement homogène alors son inverse H^{-1} est aussi une application multivoque positivement homogène.*

Notons que les dérivées graphiques d'applications multivoques, introduites par Aubin [5], dont nous parlerons plus précisément dans le paragraphe suivant, sont des applications multivoques positivement homogènes de même que les applications sous-linéaires (c'est-à-dire les applications multivoques dont le graphe est un cône convexe). Rappelons que les applications sous-linéaires ont étés considérées par Rockafellar sous le nom de *processus convexe* (voir [86, 85]). Un exemple concret d'applications multivoques positivement homogènes (qui sont en fait des applications sous-linéaires) est donné par les applications de type contrainte, c'est-à-dire les applications H telles que $H(x) = Ax - K$ où A est une application linéaire et K un cône convexe fermé.

Voici alors la définition proposée par Ioffe :

Définition 2.1.5 (Prédérivée)**.** *Soit f une fonction définie sur un voisinage de $z \in X$ à valeurs dans Y, avec X et Y espaces topologiques de Hausdorff (i.e. un espace topologique séparé) localement convexes. De plus, on considère H application multivoque positivement homogène définie de X dans Y.*
Considérons les deux relations suivantes :

$$f(z+h) - f(z) \in H(h) + r(h)\|h\|\mathbb{B}_Y, \tag{2.1}$$

$$H(h) \subset \bigcup_{0<t<1} t^{-1}(f(z+th) - f(z)) + r(h)\|h\|\mathbb{B}_Y. \tag{2.2}$$

On dira que H est :

- *une prédérivée extérieure (ou prédérivée extérieure de Fréchet) de f au point z si la relation* (2.1) *est vérifiée avec $r(h) \to 0$ si $\|h\| \to 0$;*
- *une prédérivée extérieure faible (ou prédérivée extérieure de Gâteaux) si la relation* (2.1) *est vérifiée avec $r(h) \to 0$ quand h tend vers 0 ;*

- *une prédérivée intérieure (ou prédérivée intérieure de Fréchet) de f au point z si la relation (2.2) est vérifiée avec $r(h) \to 0$ si $\|h\| \to 0$;*

- *une prédérivée intérieure faible (ou prédérivée intérieure de Gâteaux) si la relation (2.2) est vérifiée avec $r(h) \to 0$ quand h tend vers 0.*

Une application homogène qui est à la fois une prédérivée extérieure et une prédérivée intérieure (respectivement prédérivée extérieure faible et prédérivée intérieure faible) est appellée une dérivée ou dérivée de Fréchet (respectivement une dérivée faible ou une dérivée de Gâteaux) de f en z.

Une application homogène H sera appellée une prédérivée stricte de f en z si

$$f(x+h) - f(x) \in H(h) + r(x,h)\|h\| I\!B_Y, \tag{2.3}$$

où $r(x,h) \to 0$ si $\|x - z\| \to 0$, $h \to 0$.

Proposition 2.1.6. *Si H et G sont respectivement une prédérivée extérieure (respectivement une prédérivée extérieure faible) et une prédérivée intérieure (respectivement une prédérivée intérieure faible) d'une fonction f au point $z \in X$, où f est définie sur un voisinage de z et à valeurs dans Y, alors $G(h) \subset H(h)$ pour tout $h \in X$.*
Ainsi, chaque dérivée quand elle existe est définie de manière unique. En particulier, chaque dérivée est une dérivée faible.

Démonstration. Soit $y \in G(h)$. Alors pour tout $\lambda > 0$, il existe $0 \leq t \leq 1$ tel que

$$\begin{aligned}
\lambda y \;&\in t^{-1}(f(z + t\lambda h) - f(z)) + \lambda r(\lambda h)\|h\| I\!B_Y \\
&\subset t^{-1} H(t\lambda h) + 2\lambda r(\lambda h)\|h\| I\!B_Y \\
&= \lambda H(h) + 2\lambda r(\lambda h)\|h\| I\!B_Y.
\end{aligned}$$

Par suite, $y \in H(h) + 2r(\lambda h) I\!B_Y$ pour tout $\lambda > 0$ et donc $y \in H(h)$. □

Remarque 2.1.7. *Les dérivées usuelles de Fréchet, ou les strictes dérivées de Fréchet sont respectivement les dérivées et prédérivées strictes au sens de la Définition 2.1.5.*

La dérivée de Fréchet d'une application $f : X \to Y$ *au point* x*, étant l'application* $\nabla f(x)$ *vérifiant :* $f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)h + o(\|h\|), \ \ \forall h \in X.$

Exemple 2.1.8. *Considérons un ensemble* Λ *d'opérateurs linéaires définis de* X *dans* Y*, tel que pour tout* $h \in X$ *il existe* $A \in \Lambda$ *vérifiant*
$\|f(z+h) - f(z) - Ah\| \leq r(h)\|h\|$
(respectivement, pour tout $x \in X$ *et pour tout* $h \in X$*, il existe* $A \in \Lambda$ *tel que*
$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leq r(x,h)\|h\|$*).*
Alors l'application multivoque $\mathcal{A}(h) = \overline{\bigcup_{A \in \Lambda} Ah}$ *est une prédérivée externe (respectivement, une prédérivée stricte).*

La définition de Ioffe a ainsi permit d'étendre le calcul différentiel à un plus large éventail de fonctions, et donc de résoudre un panel plus varié de problèmes mathématiques.

Passons maintenant au cas qui nous intéresse pour les travaux de cette thèse, à savoir l'approximation au voisinage d'un point des applications multivoques.

2.1.2 Différentiabilité généralisée des applications multivoques

Même si nous n'utilisons pas cette approche dans nos travaux, il est impossible de parler de différentiabilité de fonctions multivoques sans citer et donner la définition des concepts proposés par Aubin (dérivée contingente, [5, 8]) et Mordukhovich (codérivée [67]). Ce sont des approches qu'on pourrait caractériser de géométriques ou graphiques, car elles font intervenir respectivement le cône tangent, et le cône normal au graphe de l'application multivoque.

Présentons dans un premier temps le concept d'Aubin. Ce dernier choisit une approche graphique de la notion de dérivée d'une application multivoque, par l'utilisation de cône tangent au graphe. Rappelons la définition du cône tangent.

Définition 2.1.9. *Soit C un sous-ensemble de X et soit $x \in C$. On considère une suite (x_k) dans C qui converge vers x et une suite (τ_k) qui décroît vers 0. Un vecteur v est dit tangent à C en x si*

$$\frac{1}{\tau_k}(x_k - x) \to v \text{ lorsque } k \to +\infty.$$

L'ensemble des vecteurs tangents à C est appelé le cône tangent à C en x et est noté $T_C(x)$. Lorsque $x \notin C$, $T_C(x)$ est l'ensemble vide.

Nous pouvons maintenant définir la dérivée contingente.

Définition 2.1.10. *Soient X et Y deux espaces normés et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. La dérivée contingente d'Aubin $DF(x,y)$ de F en $(x,y) \in \operatorname{gph}(F)$ est l'application multivoque définie sur X et à valeurs dans Y définie par*

$$\operatorname{gph}(DF(x,y)) := T_{\operatorname{gph}(F)}(x,y) \tag{2.4}$$

On a,

$$DF(x)(h) = \{y \in Y \mid (h,y) \in T_{\operatorname{gph}(F)}(x, F(x))\}. \tag{2.5}$$

Lorsque $F := f$ est une application univoque, on pose $Df(x) := Df(x, f(x))$.

Dans [52], Ioffe a montré que pour les applications univoques la dérivée contingente introduite par Aubin coïncide avec sa notion de dérivée faible quand elle existe.

Proposition 2.1.11. *Soit F une application univoque définie sur un voisinage de $x \in X$ et à valeurs dans Y. Si la dérivée faible de F en x existe, elle coïncide avec la dérivée contingente de F, $DF(x)$.*
En particulier, si $\dim Y < \infty$ et F lipschitzienne, alors $DF(x)$ est la dérivée faible de F en x. Si de plus, $\dim X < \infty$ alors $DF(x)$ est la dérivée de F en x.

Démonstration. Démontrons la première partie de la proposition. Soit $H(h)$ une prédérivée interieure faible de F en x. En remplaçant h par $\dfrac{\varepsilon h}{\|h\|}$ dans (2.2) et en posant $\lambda = \dfrac{\varepsilon t}{\|h\|}$, on obtient

$$H(h) \subset \bigcup_{0<\lambda\|h\|\leq\varepsilon} \lambda^{-1}(F(x+\lambda h) - F(x)) + r(\frac{\varepsilon h}{\|h\|})\|h\| I\!\!B_Y.$$

Si cette égalité est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, il s'en suit que $H(h) \subset DF(x)(h)$. Réciproquement, d'après (2.1), $DF(x)(h) \subset H(h)$ dès lors que $\mathcal{A}$ est une prédérivée exterieure.
Ainsi, si la dérivée existe, elle coïncide obligatoirement avec $DF(x)(h)$ d'après la Proposition 2.1.6. □

Une autre approche géométrique très présente dans la littérature est celle de la codérivée de Mordukhovich. Afin de bien comprendre cette notion, nous allons rappeler le concept de cône normal à un sous-ensemble Ω d'un espace de Banach en un point x.

Définition 2.1.12. *Soit Ω un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach X.*

(i) Soit $x \in \Omega$ et $\varepsilon \geq 0$, on appelle ensemble des ε-normales à Ω en x l'ensemble

$$\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) := \{x^* \in X^* | \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u-x\rangle}{\|u-x\|} \leq \varepsilon\}. \tag{2.6}$$

Lorsque $\varepsilon = 0$, les éléments de (2.6) sont appelés normales de Fréchet. L'ensemble des normales de Fréchet est noté $\widehat{N}(x;\Omega)$ et est appelé cône prénormal à Ω en x. Si $x \notin \Omega$, $\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) := \emptyset$ pour tout $\varepsilon \geq 0$.

(ii) Soit $\bar{x} \in \Omega$. Alors $x^* \in X^*$ est une normale limitante à Ω en $\bar{x}$ s'il existe des suites $(\varepsilon_k), (x_k)$ et (x_k^*) telles que $\varepsilon_k \downarrow 0$, $x_k \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$, et $x_k^* \xrightarrow{w^*} \bar{x}^*$ avec $x_k^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_k}(x_k;\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble de toutes ces normales limitantes

$$N(\bar{x};\Omega) := \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ \varepsilon \downarrow 0}} \widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) \tag{2.7}$$

est le cône normal à Ω en $\bar{x}$. Pour $\bar{x} \notin \Omega$, $N(\bar{x};\Omega) := \emptyset$.

La construction de la codérivée suit la même structure que celle du cône normal, en voici la définition.

Définition 2.1.13. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ avec* $\operatorname{dom} F \neq 0$*.On considère $(x,y) \in X \times Y$ et $\varepsilon \geq 0$.*

(i) La ε-codérivée de F en (x,y) est l'application multivoque $\widehat{D}^*_\varepsilon F(x,y) : Y^* \rightrightarrows X^*$ définie par

$$\widehat{D}^*_\varepsilon F(x,y)(y^*) := \{x^* \in X^* | (x^*, -y^*) \in \widehat{N}_\varepsilon((x,y); \operatorname{gph} F)\}. \tag{2.8}$$

Quand $\varepsilon = 0$ dans (2.8), cette application est appelée précodérivée ou Fréchet codérivée de F en (x,y) et est notée $\widehat{D}^* F(x,y)$.
De plus, $\widehat{D}^*_\varepsilon F(x,y)(y^*) = \varnothing$ pour tout $\varepsilon \geq 0$ et $y^* \in Y^*$ si $(x,y) \not\ni \operatorname{gph} F$.

(ii) La codérivée normale de F en $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ est l'application $D^*_N F(\bar{x},\bar{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ définie par

$$D^*_N F(\bar{x},\bar{y})(\bar{y}^*) := \limsup_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y}) y^* \overset{w^*}{\to} \bar{y}^* \varepsilon \downarrow 0} \widehat{D}^*_\varepsilon F(x,y)(y^*). \tag{2.9}$$

La codérivée normale est donc l'ensemble des points $\bar{x}^* \in X^*$ pour lesquels il existe des suites $\varepsilon_k \downarrow 0$, $(x_k,y_k) \to (\bar{x},\bar{y})$, et $(x^*_k, y^*_k) \overset{w^*}{\to} (\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ avec $(x_k,y_k) \in \operatorname{gph} F$ et $x^*_k \in \widehat{D}^*_{\varepsilon_k} F(x_k,y_k)(y^*_k)$.
De plus, $D^*_N F(\bar{x},\bar{y})(y^*) := \emptyset$ pour tout $y^* \in Y^*$ si $(\bar{x},\bar{y}) \notin \operatorname{gph} F$.

(iii) La codérivée mixte de F en $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ est l'application multivoque $D^*_M F(\bar{x},\bar{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ définie par

$$D^*_M F(\bar{x},\bar{y})(\bar{y}^*) := \limsup \widehat{D}^*_\varepsilon F(\bar{x},\bar{y})(y^*). \tag{2.10}$$

La codérivée mixte est donc l'ensemble des points $\bar{x}^* \in X^*$ pour lesquels il existe des suites $\varepsilon_k \downarrow 0$, $(x_k,y_k,y^*_k) \to (\bar{x},\bar{y},\bar{y}^*)$, et $x^*_k \overset{w^*}{\to} \bar{x}^*$ avec $(x_k,y_k) \in \operatorname{gph} F$ et $x^*_k \in \widehat{D}^*_{\varepsilon_k} F(x_k,y_k)(y^*_k)$.
De plus, $D^*_M F(\bar{x},\bar{y})(y^*) := \emptyset$ pour tout $y^* \in Y^*$ si $(\bar{x},\bar{y}) \notin \operatorname{gph} F$.

La différence entre codérivée mixte et codérivée normale se situe au niveau du type de convergence de la suite (y^*_k) vers $\bar{y}^*$.

Attardons nous maintenant sur le nouveau concept qui nous intéresse.

Très récemment, en 2009, Pang [73] a étendu le travail de Ioffe [52], en proposant un nouveau concept de différentiation généralisée pour les applications multivoques

définies de X dans Y, où X et Y sont des espaces de Banach. Ce nouveau concept appelé ici la H-différentiabilité (noté T-différentiabilité par Pang), fait intervenir, tout comme les prédérivées de Ioffe, des applications positivement homogènes.
Nous allons ici donner la première définition de la différentiabilité d'une application multivoque et en donner quelques propriétés de base.

Définition 2.1.14 (H-différentiabilité)**.** *Soient X et Y deux espaces de Banach et soit une fonction multivoque H positivement homogène définie de X dans Y.*

(a) *On dit qu'une application multivoque $S : X \rightrightarrows Y$ est extérieurement H-différentiable en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que*

$$S(x) \subset S(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta \|x - \bar{x}\| \mathbb{B}, \quad \forall x \in V. \tag{2.11}$$

S est dite intérieurement H-différentiable en $\bar{x}$ si la formule précédente est remplacée par

$$S(\bar{x}) \subset S(x) + H(x - \bar{x}) + \delta \|x - \bar{x}\| \mathbb{B}, \quad \forall x \in V. \tag{2.12}$$

Si S est extérieurement H-différentiable et intérieurement H-différentiable, alors S est H-différentiable en $\bar{x}$.

(b) *On dit qu'une application multivoque $S : X \rightrightarrows Y$ est strictement H-différentiable en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que*

$$S(x) \subset S(x') + H(x - x') + \delta \|x - x'\| \mathbb{B}, \quad \forall x, x' \in V. \tag{2.13}$$

Remarque 2.1.15. *Lorsque S est univoque $S : X \to Y$, les définitions de H-différentiabilité intérieure, H-différentiabilité extérieure et de H-différentiabilité sont équivalentes.*

Remarque 2.1.16. *Lorsque S est univoque et H-différentiable (respectivement strictement H-différentiable), l'application $H : X \rightrightarrows Y$ est une prédérivée (respectivement une prédérivée stricte) au sens de Ioffe (Définition 2.1.5).*

Remarque 2.1.17.

- *(i) Si S est strictement H-différentiable avec H une application positivement homogène vérifiant $H(x) \subset \kappa\|x\|\mathbb{B}$ pour tout $x \in X$ alors S est lipschitzienne de constante κ ;*
- *(ii) Si S est extérieurement H-différentiable avec H une application positivement homogène vérifiant $H(x) \subset \kappa\|x\|\mathbb{B}$ pour tout $x \in X$ alors S est calme en $\bar{x}$.*

Afin de motiver sa définition de T-différentiabilité, Pang énonce le résultat suivant où $H(-)$ représente l'application multivoque définie de X à valeurs dans Y définie par $H(-)(w) := H(-w)$. Rappelons que h est la distance de Hausdorff (Définition 1.2.2).

Proposition 2.1.18. *Supposons que l'application $S : X \rightrightarrows Y$ soit à valeurs fermées.*

(1) Soit $H : X \to Y$ une application univoque. Alors S est H-différentiable en $\bar{x}$ si et seulement si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que

$$h(S(\bar{x}) + H(x - \bar{x}), S(x)) \leq \delta\|x - \bar{x}\|, \quad \textit{pour tout } x \in V. \tag{2.14}$$

(2) Soit $H : X \to Y$ une application univoque telle que $H = -H(-)$. Alors S est strictement H-différentiable en $\bar{x}$ si et seulement si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que

$$h(S(x') + H(x - x'), S(x)) \leq \delta\|x - x'\|, \quad \textit{pour tout } x, x' \in V. \tag{2.15}$$

On constate que les propriétés (2.14) et (2.15) rappellent celles vérifiées par la différentielle d'une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. En effet si on considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, différentiable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, on sait qu'il existe une fonction $df_{\bar{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire et continue vérifiant l'égalité

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}(h) + o(\|h\|), \;\; \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

En posant $x = \bar{x} + h$, l'égalité précédente devient

$$f(x) - f(\bar{x}) - df_{\bar{x}}(x - \bar{x}) = o(\|x - \bar{x}\|). \tag{2.16}$$

La similitude entre les inégalités (2.14) et (2.15) et l'égalité (2.16) est alors très claire, et la définition de Pang est donc complètement justifiée.

Un autre concept proche de la H-différentiabilité est la pseudo H-différentiabilité.

Définition 2.1.19 (Pseudo H-différentiabilité)**.** *Soit $S : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque telle que $\bar{y} \in S(\bar{x})$.*

(1) Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On dit que S est pseudo H-différentiable extérieurement en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe des voisinages V de $\bar{x}$ et W de $\bar{y}$ tels que

$$S(x) \cap W \subset S(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|I\!B \text{ pour tout } x \in V.$$

S est pseudo H-différentiable intérieurement en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si

$$S(\bar{x}) \cap W \subset S(x) - H(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|I\!B \text{ pour tout } x \in V.$$

S est pseudo H-différentiable en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si elle est à la fois pseudo H-différentiable extérieurement et pseudo H-différentiable intérieurement en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.

(2) Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque positivement homogène. On dit que S est pseudo H-différentiable strictement en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe des voisinages V de $\bar{x}$ et W de $\bar{y}$ tels que

$$S(x) \cap W \subset S(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\|I\!B \text{ pour tout } x, x' \in V.$$

En posant $H(w) := [\operatorname{lip} S(\bar{x}|\bar{y})]|w|I\!B$, on démontre aisément l'équivalence entre la propriété d'Aubin définie dans le chapitre précédent et la pseudo H-différentiabilité stricte. Énonçons alors la proposition suivante.

Proposition 2.1.20. *Une application multivoque $S : X \rightrightarrows Y$ a la propriété d'Aubin en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si et seulement si elle est pseudo H-différentiable strictement en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $H : X \rightrightarrows Y$ définie par $H(w) := [\operatorname{lip} S(\bar{x}|\bar{y})]\|w\|I\!B$.*

Démonstration. Supposons S pseudo H-différentiable strictement avec $H(w) := [\operatorname{lip} S(\bar{x}|\bar{y})]|w|I\!B$, alors pour tout $\delta > 0$, il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que

$$S(x) \cap V \subset S(x') + [\operatorname{lip} S(\bar{x}|\bar{y})]\|x - x'\|I\!B + \delta\|x - x'\|I\!B, \ \ \forall x, x' \in U.$$

D'après la convexité de $I\!B$, cette dernière inclusion peut s'écrire

$$S(x) \cap V \subset S(x') + ([\operatorname{lip} S(\bar{x}|\bar{y})] + \delta)\|x - x'\|\mathbb{B}, \;\; \forall x, x' \in U.$$

Ainsi en posant $\kappa = [\operatorname{lip} S(\bar{x}|\bar{y})] + \delta$, on a trouvé un $\kappa \in [0, \infty[$, et des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que S ait la propriéte d'Aubin en $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Réciproquement, si S a la propriété d'Aubin en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, il existe $\kappa \in [0, \infty[$ et des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que

$$S(x) \cap V \subset S(x') + \kappa\|x - x'\|\mathbb{B}, \;\; \forall x, x' \in U.$$

Ainsi pour tout $\delta > 0$, on a

$$S(x) \cap V \subset S(x') + (\kappa + \delta)\|x - x'\|\mathbb{B}, \;\; \forall x, x' \in U.$$

Par suite

$$S(x) \cap V \subset S(x') + [\operatorname{lip} S(\bar{x}|\bar{y})]\|x - x'\|\mathbb{B} + \delta\|x - x'\|\mathbb{B}, \;\; \forall x, x' \in U.$$

D'où S pseudo H-différentiable strictement en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $H(w) := [\operatorname{lip} S(\bar{x}|\bar{y})]\|w\|\mathbb{B}$.

□

Alors que le sous-différentiel de Clarke est unique, les dérivées généralisées H ne le sont pas nécessairement. On pourra le constater dans l'exemple suivant proposé par Pang dans [73], qui nous montre également qu'une application multivoque peut-être (pseudo) H_1-différentiable et (pseudo) H_2-différentiable, mais ne pas être (pseudo) $(H_1 \cap H_2)$-différentiable.

Exemple 2.1.21. *Soit $S : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ définie par $S(x, y) = \{x\} \times \mathbb{R}$, et soient $H_1, H_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par $H_1(x, y) = (x, y)$ et $H_2(x, y) = (x, 0)$. On montre facilement que S est (pseudo) H_1-différentiable strictement et (pseudo) H_2-différentiable strictement en tous points, mais qu'elle n'est (pseudo) $(H_1 \cap H_2)$-différentiable nulle part.*

Considérons maintenant des suites (F_n) et (H_n) respectivement dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, on peut alors définir l'uniforme stricte H_n-différentiabilité. Rappelons que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ représente l'ensemble des applications multivoques définies de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$ à valeurs fermées et que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ représente l'ensemble des applications multivoques définies de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$ qui sont positivement homogènes.

Définition 2.1.22. *Soient (F_n) une suite de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et (H_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. On dit que la suite (F_n) est uniformément strictement H_n-différentiable en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage uniforme V de $\bar{x}$ (i.e., un voisinage qui ne dépend pas de n) tel que pour $n = 0, 1, ...$*

$$F_n(x) \subset F_n(x') + H_n(x - x') + \delta \|x - x'\| I\!B \text{ pour tout } x, x' \in V.$$

Évidemment, en modifiant légèrement la définition précédente, on peut également définir les concepts d'uniforme H_n-différentiabilité extérieure, d'uniforme H_n-différentiabilité intérieure et d'uniforme H_n-différentiabilité.

2.2 Convergence de Fisher

Afin d'appréhender correctement la notion de convergence des applications multivoques que nous utilisons dans ces travaux, il est nécessaire de présenter une topologie sur l'espace des sous-ensembles de X.
Comme nous l'avons dit précédemment les applications qui nous concernent sont des applications à valeurs fermées, il semble donc naturel de s'intéresser à une topologie sur les sous-ensembles fermés d'un espace métrique. De tels espaces topologiques sont appelés des hyperespaces.

Nous avons choisi d'utiliser une topologie de type "hit and miss" : la topologie proximale.
Les topologies de type "hit and miss" ont été étudiées par divers auteurs, voir par exemple les travaux de Poppe [80, 81], de Fisher [36], ou encore de Beer *et al.* [12]. Parmi les topologies de ce type on peut citer entre autre la topologie de Vietoris introduite par Vietoris lui-même dans [91, 92] ou la topologie de Wijsman ([94]). Pour plus de détails sur ces topologies le lecteur pourra se referrer à l'ouvrage de Beer [13].

Donnons maintenant la définition des ensembles B^- et B^{++} afin de définir la topologie proximale.

Soit E un espace topologique de Hausdorff (c'est-à-dire un espace topologique séparé). L'ensemble des sous-ensembles fermés et non vides de E est noté $CL(E)$. Soit B un sous-ensemble de E, rappelons les définitions suivantes :

- L'ensemble des sous-ensembles fermés qui rencontrent B est
  $B^- = \{A \in CL(E) \,|\, A \cap B \neq \emptyset\}$;
- L'ensemble des sous-ensembles fermés qui sont strictement contenus dans B est
  $B^{++} = \{A \in CL(E) \,|\, \exists \varepsilon > 0, \mathbb{B}_\varepsilon(A) \subset B\}$,
  où $\mathbb{B}_\varepsilon(A) := \bigcup_{a\in A} \mathbb{B}_\varepsilon(a)$ désigne l'agrandissement de coefficient ε de A.

La topologie suivante sur $CL(E)$ a été introduite par Beer *et al.* dans [12].

Définition 2.2.1. *Soit (E,d) un espace métrique. La topologie proximale τ_{δ_d} sur $CL(E)$ admet comme sous-base tous les ensembles de la forme V^-, où V est un ouvert de E, et tous les ensembles de la forme W^{++}, où W est ouvert dans E.*

Une base pour la topologie proximale est l'ensemble de toutes les intersections finies d'éléments de sa sous-base.
Comme spécifié dans [12],

$$(V \cap W)^{++} = V^{++} \cap W^{++}.$$

Ainsi une base pour notre topologie correspond à tous les ensembles de la forme

$$V^{++} \cap V_1^- \cap V_2^- \cap ... \cap V_n^-;$$

où $V, V_1, ..., V_n$ sont des ouverts de E.

Il en découle qu'une base locale pour la topologie proximale en $A \in CL(E)$ correspond à tous les ensembles de la forme

$$\mathbb{B}_\varepsilon(A)^{++} \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a_1)^- \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a_2)^- \cap ... \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a_n)^- ;$$

où les points $a_1, a_2, ..., a_n$ sont dans A et ε est un réel positif.

La topologie proximale est donc compatible avec la convergence de Fisher que nous définissons dans la suite.

La convergence au sens de Fisher a été introduite dans [35] et étudiée dans plusieurs travaux (voir [11, 12, 36]).

Définition 2.2.2 (Convergence de Fisher)**.** *Soit (E, d) un espace métrique. Une suite (A_n) dans $CL(E)$ converge vers $A \in CL(E)$ au sens de Fisher si*

(1) $A \subset \liminf_n A_n$ *;*

(2) $\lim_n e(A_n, A) = 0$.

Une suite (A_n) de sous-ensembles fermés de E vérifiant l'assertion (1) (respectivement, l'assertion (2)) de la définition précédente, sera dite Fisher convergente inférieurement (respectivement, Fisher convergente supérieurement) vers le sous-ensemble A.

Remarque 2.2.3. *Il est prouvé dans [13] par exemple, qu'une suite (A_n) converge vers un sous-ensemble A dans $(CL(E), \tau_{\delta_d})$ si et seulement si elle est convergente vers A au sens de Fisher.*

En adaptant ce concept à notre cadre de travail, on obtient la définition suivante pour la convergence des applications multivoques, que nous appellerons également la convergence de Fisher.

Définition 2.2.4. *Soient X et Y deux espaces de Banach et soit (F_n) une suite dans $\mathcal{F}(X, Y)$. On dit que (F_n) Fisher converge vers $F \in \mathcal{F}(X, Y)$, et on note $F_n \xrightarrow{F} F$ si*

(1) $F(x) \subset \liminf_n F_n(x)$ *pour tout* $x \in X$ *;*

(2) $\lim\limits_{n} \sup\limits_{x \in X} e(F_n(x), F(x)) = 0$.

Lorsque les applications F_n et F vérifient l'assertion (1) de la Définition 2.2.4, on dit que la suite (F_n) Fisher converge inférieurement vers F, et lorsqu'elles vérifient l'assertion (2) on dit que (F_n) Fisher converge supérieurement vers F.

Remarque 2.2.5. *Lorsque $F_n := f_n$ pour tout n et $F := f$, où f et f_n sont des applications univoques, on remarque que l'assertion* (1) *de la Définition 2.2.4* *coïncide avec la convergence de la suite* $(f_n(x))$ *vers* $f(x)$*, pour tout* $x \in X$*, alors que l'assertion* (2) *n'est rien d'autre que la convergence uniforme de la suite* (f_n) *vers* f*.*

La proposition suivante traite de la stabilité de l'homogénéité positive vis-à-vis de la Fisher convergence.

Proposition 2.2.6. *Soit* (H_n) *une suite de* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ *et soit* $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ *telles que* $H_n \xrightarrow{F} H$*. Alors* H *est une application positivement homogène.*

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}^m$ et λ un réel strictement positif. Prouvons d'abord que $H(\lambda x) \subset \lambda H(x)$.
Si $H(\lambda x) = \emptyset$ il n'y a rien a prouver. Dans le cas contraire, considérons $y \in H(\lambda x)$.
D'après la Fisher convergence inférieure de la suite (H_n) vers H on sait que $H(\lambda x) \subset \liminf_n H_n(\lambda x)$. Il existe donc une suite (y_n) d'éléments de $H_n(\lambda x)$ convergeant vers y. Il s'en suit que

$$\frac{y_n}{\lambda} \in H_n(x) \text{ pour tout } \ n. \tag{2.17}$$

De plus, la Fisher convergence supérieure nous donne $\sup_{z \in \mathbb{R}^m} e(H_n(z), H(z)) \to 0$, ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}^m, e(H_n(z), H(z)) < \varepsilon.$$

Par suite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}^m, H_n(z) \subset H(z) + \varepsilon \mathbb{B}.$$

De (2.17) on déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \frac{y_n}{\lambda} \in H(x) + \varepsilon \mathbb{B}.$$

En passant à la limite sur n, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$, $\dfrac{y}{\lambda} \in \overline{H(x) + \varepsilon \mathbb{B}}$.
L'ensemble $H(x)$ étant un fermé de $\mathbb{R}^p$, et $\varepsilon \mathbb{B}$ étant compact, l'ensemble $H(x) + \varepsilon \mathbb{B}$ est fermé.
Par suite, $\dfrac{y}{\lambda} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} (H(x) + \varepsilon \mathbb{B})$. Il s'en suit que $\dfrac{y}{\lambda} \in \overline{H(x)} = H(x)$ et on obtient alors

$$H(\lambda x) \subset \lambda H(x). \tag{2.18}$$

Réciproquement, soient $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda > 0$. Si $H(x) = \emptyset$ il n'y a rien à faire. Dans le cas contraire, prenons $y \in \lambda H(x)$. Puisque $H(z) \subset \liminf_n H_n(z)$, pour tout $z \in \mathbb{R}^m$, il existe une suite (y_n) dans $\mathbb{R}^p$ telle que $y_n \in H_n(x)$ pour $n = 0, 1, ...$ et $y_n \to \dfrac{y}{\lambda}$. Ainsi la suite (λy_n) converge vers y et on a $\lambda y_n \in \lambda H_n(x) = H_n(\lambda x)$ pour $n = 0, 1, ...$

Grâce à la Fisher convergence de la suite (H_n) vers H on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow H_n(\lambda x) \subset H(\lambda x) + \varepsilon \mathbb{B}.$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \lambda y_n \in H(\lambda x) + \varepsilon \mathbb{B}.$$

D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $y \in \overline{H(\lambda x) + \varepsilon \mathbb{B}} = H(\lambda x) + \varepsilon \mathbb{B}$.
Par conséquent, $y \in H(\lambda x)$ et on obtient donc

$$\lambda H(x) \subset H(\lambda x). \tag{2.19}$$

En combinant les inclusions (2.18) et (2.19) on obtient $\lambda H(x) = H(\lambda x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda > 0$.
Afin de terminer la preuve, il reste à montrer que $0 \in H(0)$.

Grâce à la Fisher convergence supérieure de la suite (H_n) vers H, pour tout ε positif, on a

$$H_n(0) \subset H(0) + \varepsilon \mathbb{B}.$$

Comme $0 \in H_n(0)$ pour tout n, on en déduit que, pour tout ε positif, $0 \in H(0) + \varepsilon \mathbb{B}$.
Il en découle que $0 \in \overline{H(0)} = H(0)$ et la preuve est ainsi achevée.

□

On se demande maintenant si la limite d'une suite d'applications positivement homogènes ayant une norme finie admet également une norme finie. Les propositions suivantes nous fournissent quelques éléments de réponses.

Introduisons d'abord la définition de la norme extérieure d'une application multivoque positivement homogène.

Définition 2.2.7 (Norme extérieure)**.** *Si $H : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque positivement homogène alors la norme extérieure de H est définie par*

$$|H|^+ := \sup_{|x|\leq 1} \sup_{y\in H(x)} \|y\| = \sup\{\|y\| \mid y \in H(x), \|x\| \leq 1\}, \tag{2.20}$$

avec la convention $\sup_{y\in\emptyset} \|y\| = -\infty$.

Notons que, $|H|^+ < \infty$ implique que $H(0) = \{0\}$, et lorsque $H(0) = \{0\}$, $|H|^+ = \text{clm } H(0|0) = \text{clm } H(0)$.
Une autre formulation, fort utile, de (2.20) est

$$|H|^+ = \inf\{\kappa > 0 | H(\overline{I\!B}) \subset \kappa\overline{I\!B}\}.$$

Les applications positivement homogènes ayant une norme extérieure finie sont d'un intérêt indéniable et vont jouer un rôle important pour établir les résultats du chapitre suivant. Pour cette raison nous allons donc énoncer quelques conditions nécessaires pour qu'une application positivement homogène ait une norme extérieure finie. C'est un problème qui a été méticuleusement étudié par Robinson dans le cadre des processus convexes (voir [82]). La proposition suivante est issue de [29].

Proposition 2.2.8. *Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une application positivement homogène. Alors, on a l'implication suivante*

$$|H|^+ < \infty \Rightarrow H(0) = \{0\},$$

Cette implication devenant une équivalence lorsque H a un graphe fermé et que $\dim X < \infty$.

Avant d'énoncer la proposition suivante, rappelons qu'une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dite *ouverte* en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, où $\bar{y} \in F(\bar{x})$, si $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom F})$ et si pour tout voisinage U de $\bar{x}$, l'ensemble $F(U) = \bigcup_{x\in U} F(x)$ est un voisinage de $\bar{y}$.

Proposition 2.2.9. *Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque positivement homogène telle que $0_X \in \mathrm{int}(\mathrm{dom\,H})$. Si $|H|^+ < \infty$ alors H^{-1} est ouverte en 0_Y pour 0_X.*

Démonstration. Soit V un voisinage de 0_Y dans Y et soit α une constante positive telle que $\mathbb{B}_\alpha(0_Y) \subset V$. Montrons que $H^{-1}(V)$ est un voisinage de 0_X dans X.
Comme $|H|^+ < \infty$, il existe une constante $\beta > 0$ telle que $\beta|H|^+ < \alpha$ et pour tout $x \in X$,

$$H(x) \subset |H|^+\|x\|\overline{\mathbb{B}}.$$

En prenant β plus petit si nécessaire, on peut supposer que $\mathbb{B}_\beta(0_X) \subset \mathrm{dom}\, H$, alors, pour tout $x \in \mathbb{B}_\beta(0_X)$, il y a un élément $y \in H(x)$ tel que $\|y\| \leq \beta|H|^+ < \alpha$, *i.e.*, $y \in \mathbb{B}_\alpha(0_Y)$. On a ainsi démontré que pour tout $x \in \mathbb{B}_\beta(0_X)$, il existe $y \in H(x) \cap \mathbb{B}_\alpha(0_Y)$, ainsi

$$\mathbb{B}_\beta(0_X) \subset H^{-1}(\mathbb{B}_\alpha(0_Y)) \subset H^{-1}(V),$$

et donc $H^{-1}(V)$ est un voisinage de 0_X dans X. □

Nous pouvons maintenant étudier la relation entre une suite d'applications positivement homogènes ayant une norme extérieure finie et le caractère fini de la norme de sa limite.

Proposition 2.2.10. *Soit (H_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Supposons que la suite (H_n) est uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe $\kappa > 0$ tel que $|H_n|^+ \leq \kappa$ pour $n = 0, 1, ...$ Si la suite (H_n) Fisher converge inférieurement vers H alors $|H|^+ \leq \kappa$.*

Démonstration. La suite (H_n) étant uniformément bornée, il existe un réel positif κ tel que

$$H_n(x) \subset \kappa\|x\|\overline{\mathbb{B}}, \forall x \in \mathbb{R}^m. \tag{2.21}$$

Soit $x \in \mathrm{dom}\, H$ et soit $y \in H(x)$. Comme $H(x) \subset \liminf H_n(x)$, il existe une suite (y_n) convergeant vers y, telle que $y_n \in H_n(x)$ pour $n = 0, 1, ...$ Il découle de (2.21) que $y_n \in \kappa\|x\|\overline{\mathbb{B}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite sur n, on obtient $y \in \kappa\|x\|\overline{\mathbb{B}}$ et donc $H(x) \subset \kappa\|x\|\overline{\mathbb{B}}$. Ce qui implique clairement que $|H|^+ \leq \kappa$.

□

En renforçant la convergence de la suite (H_n) on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.2.11. *Soit (H_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Supposons qu'il existe une constante positive κ telle que $|H_n|^+ = \kappa$ pour $n = 0, 1, ...$ Si la suite (H_n) Fisher converge vers H alors $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et $|H|^+ = \kappa$.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.2.6, $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et d'après la Proposition 2.2.10, $|H|^+ \leq \kappa$. Si $|H|^+ < \kappa$, il existe un scalaire positif $\widetilde{\kappa} < \kappa$ tel que $|H|^+ < \widetilde{\kappa}$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\widetilde{\kappa}+\varepsilon < \kappa$. D'après la Fisher convergence supérieure de la suite (H_n) vers H, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ et $x \in \mathbb{R}^m$, $H_n(x) \subset H(x)+\varepsilon I\!\!B$. Comme $|H|^+ < \widetilde{\kappa}$, et la boule unité $I\!\!B$ étant convexe, on obtient que pour tout $x \in \overline{I\!\!B}$

$$H_n(x) \subset (\widetilde{\kappa} + \varepsilon)\overline{I\!\!B}.$$

Par conséquent, $|H_n|^+ < \kappa$, ce qui contredit $|H_n|^+ = \kappa$ pour $n = 0, 1, ...$ et termine la preuve.

□

Réciproquement, on peut montrer que si une suite d'applications multivoques positivement homogènes admet une limite dont la norme extérieure est finie alors cette suite est uniformément bornée. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.2.12. *Soit (H_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ telle que la suite H_n Fisher converge supérieurement vers H. Si $|H|^+ < \infty$ alors la suite (H_n) est uniformément bornée.*

Démonstration. Comme $|H|^+ < \infty$, il existe une constante $\kappa \geq 0$ telle que $H(x) \subset \kappa\overline{I\!\!B}$ pour tout $x \in \overline{I\!\!B}$. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$ et on a

$$\sup_{x\in X} e(H_n(x), H(x)) \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \geq N$, $x \in \overline{I\!\!B}$ on peut écrire

$$H_n(x) \subset H(x) + \varepsilon\overline{I\!\!B} \subset \kappa\overline{I\!\!B} + \varepsilon\overline{I\!\!B} = (\kappa + \varepsilon)\overline{I\!\!B}.$$

On en déduit que la suite (H_n) est uniformément bornée. □

Les Propositions 2.2.10 et 2.2.12, nous permettent d'énoncer la proposition suivante dont la preuve est immédiate.

Proposition 2.2.13. *Soit (H_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ telles que la suite (H_n) Fisher converge vers H. Alors $|H|^+ < \infty$ si et seulement si la suite (H_n) est uniformément bornée.*

2.3 Stabilité de la H-différentiabilité

Théorème 2.3.1. *Considérons une suite (F_n) dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et deux applications F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et H dans $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Soit (H_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. On admet que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(1) La suite (F_n) est uniformément strictement H_n-différentiable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$;

(2) La suite (F_n) Fisher converge vers F ;

(3) La suite (H_n) Fisher converge supérieurement vers H ;

(4) $|H|^+ < \infty$.

Alors, l'application F est strictement H-différentiable en $\bar{x}$.

Démonstration. Conformément à la Définition 2.1.22, l'hypothèse (1) signifie que $\forall \delta > 0$, il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que

$$F_n(x) \subset F_n(x') + H_n(x - x') + \delta \|x - x'\| I\!B, \ \ \forall x, x' \in V, n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite (F_n) Fisher converge vers F, il existe un entier N_ε^1 tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon^1$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^m} e(F_n(x), F(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Il en découle que

$$\forall n \geq N_\varepsilon^1, \ \ F_n(x') \subset F(x') + \frac{\varepsilon}{2} I\!B, \ \ \forall x' \in \mathbb{R}^m. \tag{2.23}$$

De la même façon on prouve que la Fisher convergence supérieure de la suite (H_n) vers H entraîne l'existence d'un entier N_ε^2 tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon^2, \ \ H_n(x - x') \subset H(x - x') + \frac{\varepsilon}{2} I\!B, \ \ \forall x, x' \in \mathbb{R}^m. \tag{2.24}$$

L'hypothèse de stricte H_n-différentiabilité uniforme de la suite (F_n) en $\bar{x}$ combinée avec les inclusions (2.23) et (2.24) implique que $\forall\delta > 0$, il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que

$$F_n(x) \subset F(x') + H(x - x') + \varepsilon I\!B + \delta\|x - x'\| I\!B, \ \ \forall x, x' \in V,\ n \geq N_\varepsilon;$$

où $N_\varepsilon := \max\{N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2\}$. Ainsi,

$$\liminf_n F_n(x) \subset \overline{F(x') + H(x - x') + (\varepsilon + \delta\|x - x'\|) I\!B}, \ \ \forall x, x' \in V. \tag{2.25}$$

Comme $|H|^+ < \infty$, $H(x - x')$ est compact ; de plus, les ensembles $F(x')$ et $(\varepsilon + \delta\|x - x'\|) I\!B$ sont respectivement, fermé et compact.
En conséquence, $F(x') + H(x - x') + (\varepsilon + \delta\|x - x'\|) I\!B$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^p$ et la relation (2.25), combinée à la Fisher convergence de F_n vers F implique

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + (\varepsilon + \delta\|x - x'\|) I\!B, \ \ \forall x, x' \in V.$$

Ainsi, on a prouvé que pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\| I\!B + \varepsilon I\!B, \forall x, x' \in V.$$

L'ensemble $F(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\| I\!B$ étant fermé il s'en suit que pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\| I\!B, \forall x, x' \in V.$$

En conclusion, l'application F est strictement H-différentiable en $\bar{x}$.

□

Notons que en considérant dans le Théorème 2.3.1, une suite (F_n) uniformément H_n-différentiable extérieurement en $\bar{x}$ (respectivement, uniformément H_n-différentiable intérieurement en $\bar{x}$ où uniformément H_n-différentiable en $\bar{x}$) on obtient, comme conclusion, la H-différentiabilité extérieure (respectivement, la H-différentiabilité intérieure ou la H-différentiabilité) de l'application F en $\bar{x}$.

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème précédent. Il assure qu'en renforçant la convergence de la suite (H_n) vers H, on peut réduire les hypothèses faites sur l'application H dans le Théorème 2.3.1, plus précisément, H n'est plus nécessairement positivement homogène et sa norme extérieure n'est pas forcément finie.

Corollaire 2.3.2. *Considérons une suite (F_n) dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et deux applications F et H dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Soit (H_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. On admet que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(1) La suite (F_n) est uniformément strictement H_n-différentiable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$;

(2) Les suites (F_n) et (H_n) Fisher convergent respectivement vers F et H ;

(3) La suite (H_n) est uniformément bornée à partir d'un certain rang.

Alors, l'application F est strictement H-différentiable en $\bar{x}$.

Démonstration. Les hypothèses (1) et (2) reprennent clairement les hypothèses (1) à (3) du Théorème 2.3.1. De plus, d'après la Proposition 2.2.6, $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, et la Proposition 2.2.13 entraîne $|H|^+ < \infty$. Il suffit donc d'appliquer le Théorème 2.3.1 pour obtenir la conclusion. □

Chapitre 3

Dépendance continue des ensembles de points fixes

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la stabilité des ensembles des points fixes d'applications multivoques contractantes. Cette étude ayant déjà été menée par Markin, dans des espaces de Hilbert, pour des applications à valeurs fermées et convexes, ainsi que par Lim, quelques années plus tard, pour des applications à valeurs fermées dans des espaces métriques complets, nous présenterons leurs résultats dans une première partie. Nous présenterons également les travaux, plus récents, d'Azé et Penot, qui considèrent des applications pseudo contractantes dans un espace métrique complet. Dans la seconde partie, nous prouverons que si une suite d'applications multivoques (T_n), Fisher converge supérieurement vers une application multivoque contractante T, alors la suite des points fixes des applications T_n Fisher converge supérieurement vers les points fixes de T.

3.1 État de l'art

Les applications multivoques contractantes étant au centre des travaux de ce chapitre, rappelons dans un premier temps leur définition.

Définition 3.1.1. *Soient (X, d) et (Y, δ) des espaces métriques et $T : X \rightrightarrows Y$ une application à valeurs fermées. On dit que T est une λ-contraction s'il existe une* *constante* $\lambda \in]0,1[$ *telle que*

$$h(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x,y), \ \forall x, y \in X,$$

où h *est la distance de Hausdorff.*

En 1969, Nadler [70] a étudié l'existence et la convergence de la suite des points fixes d'une suite d'applications multivoques contractantes dans un espace métrique complet. Nous présentons ici son théorème d'existence de point fixe.

Théorème 3.1.2. *Soit* (X,d) *un espace métrique complet et soit* $F : X \rightrightarrows X$ *une application multivoque à graphe non vide et à valeurs fermées que l'on suppose* λ*-contractante. Alors* F *admet un point fixe.*

En appliquant l'étude de stabilité de Nadler à un espace de Hilbert, Markin [64] prouve, en 1973, la convergence de la suite des ensembles des points fixes d'une suite convergente d'applications multivoques contractantes. Pour ses résultats il utilise une convergence uniforme de type Hausdorff afin de garantir le bon comportement des ensembles de points fixes de suites d'applications multivoques contractantes.

Dans ses travaux, Markin considère un sous-ensemble A fermé et borné d'un espace de Hilbert H. Il considère également des applications $T_i : H \rightrightarrows H$,
$i = 0, 1, 2, ...$, et suppose qu'elles vérifient les assertions suivantes :

(1) $T_i(x)$ est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de A pour tout $x \in A$.

(2) Chaque application T_i est une contraction, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in [0,1[$ tel que $h(T_i(x), T_i(y)) \leq \lambda d(x,y)$ pour $x, y \in A$ et $i = 0, 1, 2, ...$

(3) $\lim_{i \to +\infty} h(T_i(x), T_0(x)) = 0$ uniformément pour tout $x \in A$.

Markin établit alors que sous les conditions (1), (2) et (3), la suite des ensembles de points fixes des applications T_i converge vers l'ensemble des points fixes de T_0.

En 1985, Lim [60] étudie à son tour la stabilité des points fixes d'applications multivoques contractantes, en utilisant également une convergence uniforme de type Hausdorff, mais en supprimant certaines hypothèses du résultat de Markin. Il ne considère plus le sous-ensemble fermé, borné A, et les images de chacun des points par chacune des applications ne sont plus nécessairement des sous-ensembles fermés et convexes. Il obtient ainsi les résultats suivants.

Proposition 3.1.3. *Soient X un espace métrique complet et T_1 et T_2 des λ-contractions de X dans $CL(X)$, où $CL(X)$ représente la famille des sous-ensembles non vides et fermés de X. Alors,*

$$h(\varphi(T_1), \varphi(T_2)) \leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} h(T_1(x), T_2(x)),$$

où $\varphi(T_1)$ et $\varphi(T_2)$ désignent, respectivement, l'ensemble des points fixes des applications T_1 et T_2.

Proposition 3.1.4. *Soient X un espace métrique complet et $T_i : X \to CL(X)$ une suite de λ-contractions, $i = 0, 1, 2, ...$ Si $\lim_{i \to +\infty} h(T_i(x), T_0(x)) = 0$ uniformément pour tout x appartenant à X, alors $\lim_{i \to +\infty} h(\varphi(T_i), \varphi(T_0)) = 0$.*

Lim propose une application de ce dernier résultat aux problèmes de stabilité des ensembles de solutions des équations différentielles généralisées (ou inclusions différentielles).

Il considère le problème suivant :

$$\dot{x}(t) \in R(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{3.1}$$

où $R(t, x(t))$ est un sous-ensemble compact et convexe de l'espace Euclidien de dimension n, pour $t \in \mathbb{R}$ et $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

L'existence d'une solution au problème (3.1) a été prouvée par Filippov [33], Castaing [18] et Hermes [50] sous certaines conditions sur la multi-application R. Dans [65], Markin prouve un théorème de stabilité de l'ensemble des solutions du problème (3.1) en utilisant la norme L^2. Lim établit le même résultat en utilisant la norme supérieure dans [60].

Soient B une boule centrée en l'origine dans $\mathbb{R}^n$, et $CC(B)$ la famille des sous-ensembles non vides, fermés et convexes, munie de la distance de Hausdorff engendrée par la norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{C}([0, a])$ l'ensemble des applications continues définies

de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}^n$, avec la norme supérieure.
Une solution du problème (3.1) sera une fonction absolument continue y, avec $\dot{y}(t) \in R(t, y(t))$ et $y(0) = x_0$.
Lim suppose que R est une fonction continue de $[0, a] \times B$ dans $CC(B)$ vérifiant

$$h(R(t, x), R(t, y)) \leq k\|x - y\|,$$

pour $k > 0$.
Pour $b \in B$, il considère l'ensemble des solutions du problème (3.1) sur $[0, a]$, noté $S(b)$ avec $x_0 = b$.
D'après [33] et [50] on sait que $S(b)$ est non vide, et les travaux de Castaing [18] prouvent de plus que $S(b)$ est compact. Lim obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3.1.5. *Si $ka < 1$, alors $S(b)$ est continue de B dans la famille des sous-ensembles non vides et compacts de $\mathcal{C}([0, a])$, munie de la distance de Hausdorff.*

Plus récemment, en 2006, Azé et Penot [9] se sont également intéressés aux ensembles de points fixes, mais en considérant des applications multivoques pseudo-contractantes, notion que nous définissons ci-dessous.

Définition 3.1.6. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et soit X un espace métrique. On dit que l'application $F : X \rightrightarrows X$, est pseudo-$\lambda$-contractante relativement au sous-ensemble $U \subset X$ lorsque pour tout $x, x' \in U$ on a*

$$e(F(x) \cap U, F(x')) \leq \lambda d(x, x').$$

Remarque 3.1.7. *Soit $F : X \rightrightarrows X$ une application multivoque telle que pour $x_0 \in X$, $r > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, l'application multivoque F_r définie par $F_r(x) = F(x) \cap \mathbb{B}_r(x_0)$ soit λ-contractante sur $\mathbb{B}_r(x_0)$. Alors F est pseudo-λ-contractante relativement à $\mathbb{B}_r(x_0)$ puisque pour tout $x, x' \in X$*

$$e(F(x) \cap \mathbb{B}_r(x_0), F(x')) \leq e(F_r(x), F_r(x')).$$

Toutefois la réciproque est fausse.

Avant de présenter les résultats de [9], précisons d'abord les notations utilisées :

$$e_r(C, D) = e(C \cap \mathbb{B}_r(x_0), D) \;\; et \;\; h_r(C, D) = \max\{e_r(C, D), e_r(D, C)\}.$$

L'existence de points fixes pour les applications pseudo-contractantes est bien connue (voir [24, 55, 78]). Ces résultats étendent le théorème de Nadler (voir Théorème 3.1.2). Le résultat suivant nous fournit des conditions nécessaires pour qu'une application pseudo-contractante possède un point fixe. Il peut être vu comme une extension d'un corollaire du célèbre théorème de point fixe de Banach (voir Corollaire 4.3.2). Plus de détails sur ce sujet peuvent être trouvés au paragraphe 3 du chapitre 4 de cette thèse.

Proposition 3.1.8. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* $F : X \rightrightarrows X$ *une application multivoque à valeurs fermées et non vide que l'on suppose pseudo-*λ*-contractante relativement à la boule* $I\!B_r(x_0)$ *avec* $r > (1-\lambda)^{-1}d(x_0, F(x_0))$*. Alors pour tout* $\beta > d(x_0, F(x_0))$ *vérifiant* $\beta(1-\lambda)^{-1} \leq r$*, il existe une suite* (x_n) *dans* $I\!B_r(x_0)$ *telle que*

$$x_{n+1} \in F(x_n) \quad \textit{et} \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n \beta \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

De plus, pour toute suite (x_n) *de* $I\!B_r(x_0)$ *vérifiant les conditions* (3.2)*, sa limite* $\bar{x}$ *appartient à* $I\!B_r(x_0)$ *et est un point fixe de l'application* F*, ce qui entraîne que l'ensemble des points fixes de* F*,* $\varphi(F)$*, est non vide et*

$$d(x_0, \varphi(F)) \leq (1-\lambda)^{-1} d(x_0, F(x_0)).$$

Notons que le résultat de Nadler peut être considéré comme une conséquence directe de la proposition précédente.

La proposition suivante concerne l'étude de la sensibilité de l'ensemble des points fixes, aux variations de l'application F.

Proposition 3.1.9. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* $F : X \rightrightarrows X$ *une application multivoque à valeurs fermées et non vide que l'on suppose pseudo-*λ*-contractante relativement à la boule* $I\!B_r(x_0)$*. Alors pour tout* $s \in]0, r[$*, et pour toute application multivoque* $G : X \rightrightarrows X$ *vérifiant*

$$e_s(\operatorname{gph} G, \operatorname{gph} F) < (1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}(r-s)$$

on a

$$e_s(\varphi(G), \varphi(F)) \leq (1-\lambda)^{-1}(1+\lambda) e_s(\operatorname{gph} G, \operatorname{gph} F) < r - s.$$

En plus d'une estimation de l'excès du graphe de F au graphe de G, Azé et Penot proposent également une estimation uniforme de l'excès des images, et obtiennent un résultat plus précis sur les ensembles de points fixes.

Proposition 3.1.10. *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $F : X \rightrightarrows X$ une application multivoque à valeurs fermées et non vide que l'on suppose pseudo-λ-contractante relativement à la boule $\mathbb{B}_r(x_0)$. Alors pour tout $s \in]0, r[$, et pour toute application multivoque $G : X \rightrightarrows X$ vérifiant*

$$e_s(G(x), F(x)) < (1 - \lambda)(r - s) \quad \textit{pour chaque} \quad x \in \mathbb{B}_s(x_0)$$

on a

$$e_s(\varphi(G), \varphi(F)) \leq (1 - \lambda)^{-1} \sup_{x \in B_r(x_0)} e_s(G(x), F(x)) \leq (1 - \lambda)^{-1} e_s(\operatorname{gph} G, \operatorname{gph} F).$$

Dans leurs travaux, Azé et Penot travaillent également sur le problème (3.1). Ils obtiennent des résultats d'existence et de stabilité de l'ensemble des solutions en considérant des hypothèses de type Lipschitz sur R.

3.2 Résultats

En adaptant la preuve de la Proposition 3.1.3 de Lim, on obtient le résultat suivant, dont les hypothèses sont plus faibles que les siennes puisque l'une des deux applications multivoques considérées dans l'énoncé n'est pas nécessairement λ-contractante.

Proposition 3.2.1. *Soit X un espace métrique complet. Soient T_0 une λ-contraction de X dans $CL(X)$ et $T : X \rightrightarrows X$ une application multivoque quelconque. Alors,*

$$e(\varphi(T), \varphi(T_0)) \leq \frac{1}{1 - \lambda} \sup_{x \in X} e(T(x), T_0(x));$$

où $\varphi(T)$ et $\varphi(T_0)$ représentent, respectivement, les ensembles des points fixes des applications T et T_0.

Le résultat suivant est nécessaire pour la démonstration de la proposition précédente.

Lemme 3.2.2. *Si l'application T est à valeurs fermées et λ-contractante, elle a un graphe fermé.*

Démonstration. Soit (x_n, y_n) une suite dans $\operatorname{gph} T$ telle que $y_n \in T(x_n)$ et (x_n, y_n) converge vers $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times X$. T étant une λ-contraction on a :
$h(T(x_n), T(\bar{x})) \leq \lambda d(x_n, \bar{x})$, ce qui entraîne $d(y_n, T(\bar{x})) \leq \lambda d(x_n, \bar{x})$.
La suite (x_n) convergeant vers $\bar{x}$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} d(y_n, T(\bar{x})) = d(\bar{y}, T(\bar{x})) = 0$. Et comme T est à valeurs fermées il s'en suit que $\bar{y} \in T(\bar{x})$, ce qui prouve que le graphe de T est fermé. □

Donnons maintenant la preuve de la Proposition 3.2.1.

Démonstration. (Proposition 3.2.1)

Si $\sup_{x\in X} e(T(x), T_0(x)) = +\infty$ il n'y a rien à prouver, nous allons donc supposer que $M := \sup_{x\in X} e(T(x), T_0(x)) < +\infty$.
De plus, si $\varphi(T) = \emptyset$, $e(\varphi(T), \varphi(T_0)) = 0$ et la preuve est faite. Sinon, $\varphi(T) \neq \emptyset$ et on peut considérer $x_0 \in \varphi(T)$, c'est-à-dire $x_0 \in T(x_0)$.
Fixons $\varepsilon > 0$, on a clairement $e(T(x_0), T_0(x_0)) < M + \varepsilon$, donc $d(x_0, T_0(x_0)) < M + \varepsilon$, et par suite il existe $x_1 \in T_0(x_0)$ tel que $d(x_0, x_1) < M + \varepsilon$.
L'application T_0 étant une λ-contraction, on a $e(T_0(x_0), T_0(x_1)) \leq \lambda d(x_0, x_1)$. Il s'en suit que $d(x_1, T_0(x_1)) \leq \lambda d(x_0, x_1)$. D'où

$$d(x_1, T_0(x_1)) < \lambda d(x_0, x_1) + \lambda \varepsilon_1, \tag{3.3}$$

où $\varepsilon_1 := c\varepsilon/(1-\lambda)$, c étant une constante positive telle que

$$c \sum_{n=1}^{+\infty} n\lambda^n < 1. \tag{3.4}$$

De l'inégalité (3.3) on déduit l'existence d'un élément $x_2 \in T_0(x_1)$ tel que

$$d(x_1, x_2) < \lambda d(x_0, x_1) + \lambda \varepsilon_1.$$

T_0 étant une λ-contraction on a à nouveau

$$e(T_0(x_1), T_0(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2) < \lambda d(x_1, x_2) + \lambda^2 \varepsilon_1.$$

Ainsi, il existe $x_3 \in T_0(x_2)$ tel que $d(x_2, x_3) < \lambda d(x_1, x_2) + \lambda^2 \varepsilon_1$. Le processus de construction est donc clair et on peut ainsi définir une suite (x_n) telle que

$$x_{n+1} \in T_0(x_n);$$
$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) + \lambda^n \varepsilon_1, \quad (n \geq 1).$$

Alors,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq \lambda d(x_n, x_{n-1})) + \lambda^n \varepsilon_1 \\ &\leq \lambda^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) + 2\lambda^n \varepsilon_1 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq \lambda^n d(x_1, x_0) + n\lambda^n \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Par suite, pour tous entiers p et q tels que $p \geq q$, on a

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{i=q}^{+\infty} d(x_{i+1}, x_i) \leq \frac{\lambda^q}{1-\lambda} d(x_1, x_0) + \sum_{i=q}^{+\infty} i\lambda^i \varepsilon_1,$$

et en utilisant l'inégalité (3.4) on obtient $\lim_{q \to +\infty} \sum_{i=q}^{+\infty} d(x_{i+1}, x_i) = 0$.

En conséquence, (x_n) est une suite de Cauchy et X étant un espace complet, la suite (x_n) converge vers un point $x \in X$.

Sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments de la suite (x_n) vérifient $x_{n+1} \in T_0(x_n)$, on obtient, grâce au Lemme 3.2.2, que $x \in T_0(x)$, c'est-à-dire que $x \in \varphi(T_o)$. De plus,

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \tfrac{1}{1-\lambda} d(x_1, x_0) + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\lambda^n \varepsilon_1 \\ &\leq \tfrac{1}{1-\lambda}(d(x_1, x_0) + \varepsilon) \\ &\leq \tfrac{1}{1-\lambda}(M + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Comme $d(x_0, \varphi(T_0)) \leq d(x_0, x)$ on obtient

$$d(x_0, \varphi(T_0)) \leq \frac{1}{1-\lambda}(M + 2\varepsilon). \tag{3.5}$$

Cette dernière inégalité restant vraie pour tout $x_0 \in \varphi(T)$ on a

$$e(\varphi(T), \varphi(T_0)) \leq \frac{1}{1-\lambda}(M + 2\varepsilon). \tag{3.6}$$

En faisant tendre ε vers 0, on termine la preuve.

□

La Proposition 3.2.1 nous fournit alors le résultat suivant concernant la stabilité de l'ensemble des points fixes d'une suite Fisher convergente supérieurement d'applications multivoques à valeurs fermées, et son corollaire.

Proposition 3.2.3. *Soit X un espace de Banach. Soient T une λ-contraction de X dans $CL(X)$ et $T_n : X \rightrightarrows X$ une suite dans $\mathcal{F}(X, X)$ Fisher convergente supérieurement vers T. Alors, la suite $(\varphi(T_n))$ Fisher converge supérieurement vers $\varphi(T)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 3.2.1,

$$e(\varphi(T_n), \varphi(T)) \leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} e(T_n(x), T(x)) \quad \text{pour } \; n = 0, 1, 2, ...$$

De plus, la Fisher convergence supérieure de T_n vers T implique que

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in X} e(T_n(x), T(x)) < (1 - \lambda)\varepsilon.$$

En combinant les deux dernières relations, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; n \geq N \Rightarrow e(\varphi(T_n), \varphi(T)) < \varepsilon,$$

ce qui nous donne la Fisher convergence supérieure de la suite $(\varphi(T_n))$ vers $\varphi(T)$ et achève la preuve.

□

Corollaire 3.2.4. *Soit $T : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ une λ-contraction à valeurs fermées. Soit (T_n) une suite dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ Fisher convergente supérieurement vers T. Si, pour $n = 0, 1, 2, ...$, x_n est un point fixe de T_n et que la suite (x_n) converge vers un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, alors $\bar{x}$ est un point fixe de T.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition 3.2.3, la suite $(\varphi(T_n))$ Fisher converge supérieurement vers l'ensemble $\varphi(T)$. Par suite il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait

$$\varphi(T_n) \subset \varphi(T) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}.$$

Comme $x_n \in \varphi(T_n)$, pour $n = 0, 1, 2, ...$ et $x_n \to \bar{x}$ on a $\bar{x} \in \liminf_n \varphi(T_n)$. D'après le résultat établi dans la Proposition 3.2.1 on sait que le graphe de T est fermé. Par suite l'ensemble $\varphi(T)$ est un fermé de $\mathbb{R}^m$. Par conséquent,

$$\bar{x} \in \overline{\varphi(T) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}} = \varphi(T) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}.$$

Et comme ε est un réel positif quelconque on obtient $\bar{x} \in \varphi(T)$.

$\square$

Chapitre 4

Approximations successives de la somme de deux opérateurs non monotones

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la convergence d'une méthode de type "forward-backward splitting" pour la résolution de l'inclusion variationnelle

$$(T_1 + T_2)(x) \ni \bar{p}, \tag{4.1}$$

où, T_1 et T_2 sont des applications multivoques définies d'un espace de Banach X dans lui-même et $\bar{p}$ est un paramètre. Contrairement à la grande majorité des travaux qui s'intéressent à cette question, nous nous plaçons ici hors du cadre monotone. En effet, nous allons successivement considérer des hypothèses de pseudo H-différentiabilité stricte et de pseudo H-différentiabilité extérieure pour l'application T_1, et des hypothèses de type lipschitz pour T_2. Ce type d'inclusions permet de décrire et de résoudre différents problèmes intéressants. Par exemple, les systèmes de contraintes, les conditions d'optimalité, les inégalités variationnelles, et plus généralement les équations généralisées peuvent être reformulées sous la forme de l'inclusion (4.1).
Les résultats de ce chapitre sont issus de l'article "Successive approximations of the sum of non monotone operators" [45].

4.1 Quelques repères

Beaucoup de problèmes de programmation convexe et d'optimisation peuvent se réduire à la recherche d'un zéro d'un opérateur maximal monotone T, c'est-à-dire à la résolution de $0 \in T(x)$. Pour ce faire, on peut par exemple utiliser l'algorithme du point proximal (voir [66, 87]) qui est défini par l'itération

$$x_{n+1} = (I + \lambda T)^{-1} x_n. \tag{4.2}$$

L'évaluation de la résolvante $J_{\lambda T} = (I + \lambda T)^{-1}$, où I est la matrice identité et λ un réel strictement positif, peut s'avérer parfois difficile en raison de la nature de T; pour résoudre ce problème on peut alors utiliser un "splitting" de T, c'est-à-dire une décomposition de T en la somme de deux opérateurs maximaux monotones T_1 et T_2, dont les résolvantes $J_{\lambda T_1}$ et $J_{\lambda T_2}$ sont plus faciles à évaluer que $J_{\lambda T}$.

On est donc ramené à résoudre le problème suivant

$$0 \in T_1(x) + T_2(x), \tag{4.3}$$

où T_1 et T_2 sont des applications multivoques définies d'un espace de Banach X dans lui même. Pour résoudre l'inclusion (4.3), on va donc uniquement utiliser les opérateurs $(I + \lambda T_1)^{-1}$ et $(I + \lambda T_2)^{-1}$.
Beaucoup de mathématiciens, notamment français, ont étudié ces méthodes de splitting avec des opérateurs monotones. On en dénombre quatre grandes catégories : Peaceman-Rachford, Douglas-Rachford, double backward et forward-backward.

L'algorithme de Peaceman-Rachford,

$$x_{n+1} = (I + \lambda T_2)^{-1}(I - \lambda T_1)(I + \lambda T_1)^{-1}(I - \lambda T_2)x_n, \tag{4.4}$$

a été introduit dans le cadre des opérateurs linéaires en 1955 [76, 90], suivi une année plus tard par l'algorithme de Douglas-Rachford [30],

$$x_{n+1} = (I + \lambda T_2)^{-1}[(I + \lambda T_1)^{-1}(I - \lambda T_2) + \lambda T_2]x_n \tag{4.5}$$

En 1979, Lions et Mercier [62] montrent, dans le cas non linéaire et pour T_1 et T_2 maximaux monotones, que pour λ fixé, la suite (x_n) engendrée soit par l'algorithme (4.4), soit par l'algorithme (4.5), converge vers une solution $\bar{x}$ de l'inclusion

(4.3). De plus, ces deux algorithmes sont inconditionnellement stables c'est-à-dire que la suite (x_n) reste bornée pour tout λ.

Le double backward splitting,

$$x_{n+1} = (I + \lambda T_1)^{-1}(I + \lambda T_2)^{-1}x_n, \tag{4.6}$$

est aussi inconditionnellement stable mais ne converge pas vers une solution de l'inclusion (4.3) pour λ quelconque sauf avec quelques modifications (voir Lions [61]).
L'algorithme de type forward-backward,

$$x_{n+1} = (I + \lambda T_1)^{-1}(I - \lambda T_2)x_n, \tag{4.7}$$

est celui que nous avons choisi d'utiliser pour la résolution de notre problème (4.3). Il a été présenté comme une généralisation de la méthode standard de projection du gradient pour les inclusions variationnelles et les problèmes d'optimisation. Cet algorithme a été largement utilisé à partir de 1979 par Passty [75], Gabay [38], Tseng [89], Chen et Rockafellar [19] et Zhu [95]. Il n'est pas inconditionnellement stable mais converge vers la solution de l'inclusion (4.3) pour λ suffisamment petit et T_2 lipschitzienne (Goldstein [46], Bruck [16]). La plupart des travaux utilisant cet algorithme sont reliés à des hypothèses de forte monotonie.

En 1983, Gabay [38] démontra que si T_1 est univoque, maximal monotone de constante μ_1 et lipschitzienne de constante κ_1, la suite (x_n) engendrée par l'algorithme (4.7), à partir de n'importe quel point de départ x_0, converge vers l'unique solution $\overline{x}$ de l'inclusion (4.3) tant que $0 < \lambda < \dfrac{2\mu_1}{\kappa_1^2}$. Il obtient aussi la convergence en supposant T_1^{-1} fortement monotone de constante ν_1, ce qui entraîne que T_1 lipschitzienne de constante $\dfrac{1}{\nu_1}$, et en choisissant le paramètre λ tel que $0 < \lambda < 2\nu_1$.
En 1991, Tseng [89] étend ce résultat à un pas λ non constant. En considérant T_1, T_2 et T_2^{-1} fortement monotone il obtient une convergence au moins linéaire.

En 1993, Renaud démontre dans sa thèse, la R-convergence linéaire de la méthode pour T_1 et T_1^{-1} fortement monotones, ainsi que $T_1 + T_2$ fortement monotone relativement à une unique solution $\overline{x}$.

Dans le paragraphe suivant nous présentons l'itération que nous allons utiliser pour étudier la convergence de l'algorithme de forward-backward splitting vers une solution de notre problème (4.1).

4.2 Forward-backward splitting

On considère dans ce paragraphe deux applications multivoques T_1 et T_2 définies d'un espace de Banach X dans lui-même et un paramètre $\bar{p}$.
Afin de résoudre le problème

$$(T_1 + T_2)(x) \ni \bar{p},$$

nous avons adopté un algorithme de type forward-backward suivant : pour un point initial x_0 donné, on construit une suite (x_n) en appliquant l'itération :

$$\lambda_n(x_{n+1} - x_n) + T_1(x_{n+1}) + T_2(x_n) \ni \bar{p} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.8}$$

où, (λ_n) est une suite décroissante de scalaires tendant vers 0, dont les éléments sont compris dans l'intervalle $]0, 1[$.

Remarquons que dans le cas où $\bar{p} = 0$, T_1 maximale monotone et T_2 lipschitzienne, monotone et univoque, l'algorithme (4.8) se réécrit de manière équivalente de la façon suivante :

$$x_{n+1} \in (I + \frac{1}{\lambda_n} T_1)^{-1}(I - \frac{1}{\lambda_n} T_2)(x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.9}$$

En réalité, dans ce cas, l'application $(I + \frac{1}{\lambda_n} T_1)^{-1}(I - \frac{1}{\lambda_n} T_2)$ est univoque et lipschitzienne (voir [19]), ce qui implique que l'inclusion (4.8) est réduite à :

$$x_{n+1} = (I + \frac{1}{\lambda_n} T_1)^{-1}(I - \frac{1}{\lambda_n} T_2)(x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.10}$$

La relation (4.10) est connue comme une méthode de "forward-backward splitting" où le "forward step" (pas avant) est donné par $(I - \frac{1}{\lambda_n} T_2)$, et le "backward

step" (pas arrière), par $(I + \frac{1}{\lambda_n} T_1)^{-1}$.
Lorsque $T_2 = 0$, c'est-à-dire lorsque le pas avant est absent, les relations (4.8) et (4.10) correspondent à l'algorithme du point proximal pour résoudre $T_1(x) \ni 0$.

Présentons maintenant dans la section suivante les outils et hypothèses que nous utiliserons pour mettre en place nos résultats de convergence hors du cadre monotone classique.

4.3 Outils et hypothèses de départ

Nos principaux résultats concernent la convergence de l'algorithme (4.8) vers la solution du problème (4.1). Afin d'en établir les preuves, nous utilisons une généralisation aux applications multivoques du théorème de point fixe de Banach, prouvé en 1994 dans [25] par Dontchev et Hager, et inspiré des travaux de Ioffe et Tikhomirov [55]. Nous considérons également une notion de convergence locale, la Q-convergence.

Énonçons dans un premier temps le théorème de point fixe original, prouvé en 1922 par Banach.

Théorème 4.3.1. (Théorème du point fixe de Banach) *On suppose que :*

1. *(1) $T : M \subseteq X \to M$ est un opérateur agissant d'une partie M dans elle même ;*
2. *(2) M est une partie fermée et non vide d'un espace métrique complet (X, d) ;*
3. *(3) T est k-contractante, i.e., pour $k \in [0, 1[$ fixé*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Alors, on a les conclusions :

1. *(a) Existence et unicité : T admet un unique point fixe dans M, i.e., $\exists\, !\ x \in M$; $x = T(x)$;*

2. *(b) Convergence de l'itération : la suite* (x_n) *des approximations successives* $x_{n+1} = T(x_n)$ *avec* $n = 0, 1, 2, ..,$ *converge vers la solution* x *pour un choix arbitraire du point initial* x_0 *dans* M;
3. *(c) Estimation de l'erreur : pour tout* $n = 0, 1, 2, ...$ *on a l'estimation a priori*

$$d(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_0, x_1),$$

et l'estimation d'erreur a posteriori

$$d(x_{n+1}, x) \leq k(1-k)^{-1}d(x_n, x_{n+1});$$

4. *(d) Vitesse de convergence : pour tout* $n = 0, 1, 2, ...$ *nous avons*

$$d(x_{n+1}, x) \leq kd(x_n, x).$$

Présentons également le corollaire très utile, duquel découle directement l'adaptation que nous utilisons pour la démonstration de nos résultats. C'est une version locale du théorème de point fixe de Banach, dans laquelle on considère une boule ouverte B dans un espace métrique complet Y, ainsi qu'une application contractante T définie sur B et à valeurs dans Y, qui ne déplace pas trop le centre de la boule B.

Corollaire 4.3.2. *On considère un espace métrique complet* (Y, d) *et la boule* $B = I\!B_r(y_0) = \{y | d(y, y_0) < r\}$. *Soit* $T : B \to Y$ *une application* α*-contractante avec* $\alpha \in]0, 1[$. *Si de plus,* $d(T(y_0), y_0) < (1-\alpha)r$, *alors l'application* T *admet un point fixe.*

Voici alors l'énoncé du théorème de point fixe adapté aux applications multivoques que nous utiliserons et dont le lecteur pourra trouver la preuve dans [25, 29] :

Théorème 4.3.3. (Théorème de point fixe) *Soient* (X, ρ) *un espace métrique complet. On considère une application multivoque* $\Phi : X \rightrightarrows X$, *un point* $\bar{x} \in X$, *et des scalaires positifs* α *et* θ *tels que* $0 \leq \theta < 1$, *les ensembles* $\Phi(x) \cap I\!B_\alpha(\bar{x})$ *soient fermés pour tout* $x \in I\!B_\alpha(\bar{x})$ *et que les assertions suivantes soient vérifiées :*
(i) $d(\bar{x}, \Phi(\bar{x})) < \alpha(1-\theta)$;
(ii) $e(\Phi(u) \bigcap I\!B_\alpha(\bar{x}), \Phi(v)) \leq \theta\rho(u, v)$ *pour tout* $u, v \in I\!B_\alpha(\bar{x})$.
Alors Φ *admet un point fixe dans* $I\!B_\alpha(\bar{x})$. *C'est-à-dire qu'il existe* $x \in I\!B_\alpha(\bar{x})$ *tel que* $x \in \Phi(x)$.

Rappelons maintenant la notion de Q-convergence. Si une suite (x_k) admet pour limite $\bar{x}$, la Q-convergence de la suite (x_k) vers $\bar{x}$ consiste à étudier le quotient

$$q_k := \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|}.$$

- On dit qu'il y a Q-convergence linéaire lorsque $\limsup q_k < 1$.
- On dit qu'il y a Q-convergence superlinéaire lorsque $\lim q_k = 0$.
- Cas particulier : (x_n) Q-converge quadratiquement vers $\bar{x}$ si $q_k = O(|x_k - \bar{x}|)$, ou de façon équivalente si $|x_{k+1} - \bar{x}| = O(|x_k - \bar{x}|^2)$.

Souvent le "Q" est omis, et, comme nous le ferons dans la suite, on parle de convergence linéaire ou de convergence superlinéaire. Pour plus de détails sur ces notions le lecteur pourra se réferer au livre [14].

Présentons maintenant les hypothèses et notations que nous considérons pour la suite de ce chapitre.

- (H_1) On considère premièrement que l'ensemble des solutions de l'inclusion (4.1) est non vide, c'est-à-dire qu'il existe $\bar{x} \in X$ tel que $T_1(\bar{x}) + T_2(\bar{x}) \ni \bar{p}$. Il s'en suit qu'il existe deux éléments $\overline{y}_1 \in T_1(\bar{x})$ et $\overline{y}_2 \in T_2(\bar{x})$ tels que $\overline{y}_1 + \overline{y}_2 = \bar{p}$.

- (H_2) Deuxièmement on suppose que T_2 est univoque au point $\bar{x}$ et que sa valeur en ce point est $\{\overline{y}_2\}$, en d'autres termes, $T_2(\bar{x}) = \{\overline{y}_2\}$.

Enfin, on pose $\lambda := \sup_n \lambda_n$, où (λ_n) est la suite définie au tout début du paragraphe 4.2 de ce chapitre.

Nous pouvons maintenant présenter les résultats originaux de cette thèse dans les deux paragraphes suivants. Il s'agit de résultats établissant la convergence locale de l'algorithme (4.8) sous différentes hypothèses de pseudo H-différentiabilité de l'application T_1. Jusqu'à la fin de ce chapitre nous supposons les hypothèses (H_1) et (H_2) satisfaites.

4.4 Algorithme de Forward-backward splitting sous des conditions de pseudo H-différentiabilité stricte

Notre premier résultat est établi dans le cas où T_1^{-1} est strictement pseudo H-différentiable. En voici l'énoncé :

Théorème 4.4.1. *Soit $T_1 : X \rightrightarrows X$ et $T_2 : X \rightrightarrows X$ deux applications multivoques et X un espace de Banach. On suppose que* $\operatorname{gph} T_i$ *est localement fermé en $(\bar{x}, \overline{y}_i)$ (pour $i = 1, 2$) et que T_1^{-1} est strictement pseudo H-différentiable en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$, où H est tel que $|H|^+ < \infty$ (i.e. $\exists \kappa > 0$ tel que $H(x) \subset \kappa \|x\| I\!\!B$ pour tout $x \in X$). On suppose de plus que T_2 est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ relativement à l'ouvert $D \subset$ dom T_2 avec la constante κ_2 telle que $\kappa_2 \kappa < \gamma$ pour une constante $\gamma \in]0, 1[$. Alors il existe un voisinage Ω de $\bar{x}$ tel que pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe une suite (x_n) engendrée par l'algorithme* (4.8) *qui converge linéairement vers $\bar{x}$.*

Démonstration. Soit δ une constante positive vérifiant $\kappa_2(\kappa + \delta) < \gamma < 1$.

Sachant que la suite (λ_n) tend vers 0 on peut supposer sans perte de généralité que

$$((1 + \gamma)\lambda + \kappa_2)(\kappa + \delta) < \gamma < 1.$$

Il s'en suit que pour $n = 1, 2, \ldots$ on a

$$(\kappa + \delta)(\lambda_n + \kappa_2)/(1 - (\kappa + \delta)\lambda_n) < \gamma < 1. \tag{4.11}$$

Soient a et b des constantes positives telles que l'application T_1^{-1} soit strictement pseudo H-différentiable en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$ avec la constante $\delta > 0$ et les voisinages $I\!\!B_a(\bar{x})$ et $I\!\!B_b(\overline{y}_1)$.

Soit U un voisinage de $\bar{x}$ tel que T_2 soit lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ relativement à D avec U et κ_2. En considérant a plus petit si nécessaire on peut supposer que

$$(2\lambda + \kappa_2)a \leq b, \tag{4.12}$$

et que

$$I\!\!B_a(\bar{x}) \subset U \cap D. \tag{4.13}$$

Prenons alors $x_0 \in \mathbb{B}_a(\bar{x})$ et $z_0 \in T_2(x_0)$ (un tel élement z_0 existe puisque $x_0 \in D \subset \operatorname{dom} T_2$). T_2 étant lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ on obtient

$$z_0 \in T_2(x_0) \subset T_2(\bar{x}) + \kappa_2 \|x_0 - \bar{x}\| \mathbb{B}.$$

Comme $T_2(\bar{x}) = \{\overline{y}_2\}$ on a $\|z_0 - \overline{y}_2\| \leq \kappa_2 a$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{B}_a(\bar{x})$:

$$\|\lambda_0(x_0-x)-z_0+\bar{p}-\overline{y}_1\| = \|\lambda_0(x_0-x)-z_0+\overline{y}_2\| \leq \lambda_0\|x_0-x\|+\|z_0-\overline{y}_2\| \leq (2\lambda_0+\kappa_2)a \leq b.$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{B}_a(\bar{x})$,

$$\lambda_0(x_0 - x) - z_0 + \bar{p} \in \mathbb{B}_b(\overline{y}_1). \tag{4.14}$$

Construisons maintenant le reste de la suite (x_n) avec x_0 comme premier terme. Un calcul rapide montre que tout point fixe x_1 de l'application multivoque

$$\Phi_0 : x \mapsto T_1^{-1}(\lambda_0(x_0 - x) - z_0 + \bar{p})$$

vérifie l'inclusion (4.8). Pour montrer l'existence de x_1 il suffit donc de montrer que l'application Φ_0 vérifie les hypothèses du théorème du point fixe de Banach (voir Théoreme 4.3.3).

Premièrement, grâce à la pseudo H-différentiabilité stricte de T_1^{-1} en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$, et au fait que $|H|^+ < +\infty$ on a

$$T_1^{-1}(y) \cap \mathbb{B}_a(\bar{x}) \subset T_1^{-1}(y') + \kappa\|y - y'\|\mathbb{B} + \delta\|y - y'\|\mathbb{B}, \ \ \forall y, y' \in \mathbb{B}_b(\overline{y}_1). \tag{4.15}$$

De plus $\mathbb{B}$ est convexe donc l'inclusion (4.15) devient

$$T_1^{-1}(y) \cap \mathbb{B}_a(\bar{x}) \subset T_1^{-1}(y') + (\kappa + \delta)\|y - y'\|\mathbb{B}, \ \ \forall y, y' \in \mathbb{B}_b(\overline{y}_1).$$

En termes d'excès, cette dernière inclusion est équivalente à

$$e(T_1^{-1}(y) \cap \mathbb{B}_a(\bar{x}), T_1^{-1}(y')) \leq (\kappa + \delta)\|y - y'\|, \ \ \forall y, y' \in \mathbb{B}_b(\overline{y}_1). \tag{4.16}$$

Ainsi, en utilisant l'inéquation (4.16) avec l'inclusion (4.14) et le fait que $T_1(\bar{x}) \ni \overline{y}_1$ on a

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \Phi_0(\bar{x})) &= d(\bar{x}, T_1^{-1}(\lambda_0(x_0 - \bar{x}) - z_0 + \bar{p})) \\ &\leq e(T_1^{-1}(\overline{y}_1) \cap I\!B_a(\bar{x}), T_1^{-1}(\lambda_0(x_0 - \bar{x}) - z_0 + \bar{p})) \\ &\leq (\kappa + \delta)\|\lambda_0(x_0 - \bar{x}) - z_0 + \bar{p} - \overline{y}_1\| = (\kappa + \delta)\|\lambda_0(x_0 - \bar{x}) - z_0 + \overline{y}_2\| \\ &\leq (\kappa + \delta)(\lambda_0\|x_0 - \bar{x}\| + \|z_0 - \overline{y}_2\|) \leq (\kappa + \delta)(\lambda_0 + \kappa_2)a. \end{aligned}$$

De l'inégalité (4.11), il découle que

$$d(\bar{x}, \Phi_0(\bar{x})) < a(1 - (\kappa + \delta)\lambda_0). \tag{4.17}$$

De plus, pour tout $u, v \in I\!B_a(\bar{x})$, la pseudo H-différentiabilité stricte de T_1^{-1} entraîne

$$\begin{aligned} e\left(\Phi_0(u) \cap I\!B_a(\bar{x}), \Phi_0(v)\right) &= e(T_1^{-1}(\lambda_0(x_0 - u) - z_0 + \bar{p}) \cap I\!B_a(\bar{x}), T_1^{-1}(\lambda_0(x_0 - v) - z_0 + \bar{p})) \\ &\leq (\kappa + \delta)\|\lambda_0(x_0 - u) - z_0 + \bar{p} - (\lambda_0(x_0 - v) - z_0 + \bar{p})\|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$e\left(\Phi_0(u) \cap I\!B_a(\bar{x}), \Phi_0(v)\right) \leq (\kappa + \delta)\lambda_0\|u - v\|. \tag{4.18}$$

Ainsi, grâce aux inégalités (4.17) et (4.18), le théorème du point fixe de Banach nous assure l'existence d'un point fixe $x_1 \in \Phi_0(x_1) \cap I\!B_a(\bar{x})$, *i.e.*,

$$x_1 \in I\!B_a(\bar{x}) \text{ et } \lambda_0(x_1 - x_0) + T_1(x_1) + T_2(x_0) \ni \bar{p} \tag{4.19}$$

Le cas où $x_1 = \bar{x}$ nous donne la conclusion souhaitée.
Sinon, en supposant que $x_1 \neq \bar{x}$, on prend $z_1 \in T_2(x_1)$ et $x \in I\!B_a(\bar{x})$. Ainsi, le caractère Lipschitz extérieur de T_2 en $\bar{x}$, nous donne

$$z_1 \in T_2(x_1) \subset T_2(\bar{x}) + \kappa_2\|x_1 - \bar{x}\|I\!B, \text{ i.e.,}$$

$$\|z_1 - \overline{y}_2\| \leq \kappa_2\|x_1 - \bar{x}\|. \tag{4.20}$$

En conséquence,

$$\|\lambda_1(x_1 - x) - z_1 + \bar{p} - \overline{y}_1\| = \|\lambda_1(x_1 - x) - z_1 + \overline{y}_2\| \leq (2\lambda_1 + \kappa_2)a \leq b,$$

et

$$\lambda_1(x_1 - x) - z_1 + \bar{p} \in I\!B_b(\overline{y}_1). \tag{4.21}$$

Soit

$$\alpha_1 = \gamma\|x_1 - \bar{x}\|. \tag{4.22}$$

Comme $\gamma < 1$ on a $\alpha_1 < a$. Considérons dès lors l'application Φ_1 définie par

$$\Phi_1(x) = T_1^{-1}(\lambda_1(x_1 - x) - z_1 + \bar{p}), \;\; \forall x \in X.$$

Grâce à l'égalité (4.22), à l'inégalité (4.16) et aux propriétés de γ dans (4.11) on a

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \Phi_1(\bar{x})) \;\; &= d(\bar{x}, T_1^{-1}(\lambda_1(x_1 - \bar{x}) - z_1 + \bar{p})) \\ &\leq e(T_1^{-1}(\overline{y}_1) \cap I\!B_a(\bar{x}), T_1^{-1}(\lambda_1(x_1 - \bar{x}) - z_1 + \bar{p})) \\ &\leq (\kappa + \delta)\|\lambda_1(x_1 - \bar{x}) - z_1 + \bar{p} - \overline{y}_1\| = (\kappa + \delta)\|\lambda_1(x_1 - \bar{x}) - z_1 + \overline{y}_2\| \\ &\leq (\kappa + \delta)(\lambda_1 + \kappa_2)\|x_1 - \bar{x}\| < \alpha_1(1 - (\kappa + \delta)\lambda_1). \end{aligned}$$

Pour $u, v \in I\!B_{\alpha_1}(\bar{x})$, et en utilisant à nouveau la pseudo H-différentiabilité stricte de T_1^{-1}, on obtient

$$\begin{aligned} e\Big(\Phi_1(u) \cap I\!B_{\alpha_1}(\bar{x}), \Phi_1(v)\Big) \;\; &\leq e\Big(T_1^{-1}(\lambda_1(x_1 - u) - z_1 + \bar{p}) \cap I\!B_{\alpha_1}(\bar{x}), T_1^{-1}(\lambda_1(x_1 - v) - z_1 + \bar{p})\Big) \\ &\leq (\kappa + \delta)\|\lambda_1(x_1 - u) - z_1 + \bar{p} - (\lambda_1(x_1 - v) - z_1 + \bar{p})\| \\ &\leq (\kappa + \delta)\lambda_1\|u - v\|. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Théoreme 4.3.3, il existe $x_2 \in \Phi_1(x_2) \cap I\!B_{\alpha_1}(\bar{x})$ qui, d'après l'égalité (4.22), vérifie

$$\|x_2 - \bar{x}\| \leq \gamma\|x_1 - \bar{x}\|.$$

Le processus de construction est maintenant clair. Si $x_n \in I\!\!B_a(\bar{x})$ et $z_n \in T_2(x_n)$ on obtient que

$$\lambda_n(x - x_n) - z_n + \bar{p} \in I\!\!B_b(\overline{y}_1).$$

Alors pour $\alpha_n = \gamma\|x_n - \bar{x}\|$, en appliquant le Théoreme 4.3.3 à l'application

$$\Phi_n : x \mapsto T_1^{-1}(\lambda_n(x_n - x) - z_n + \bar{p}),$$

on déduit l'existence d'un élément $x_{n+1} \in I\!\!B_{\alpha_n}(\bar{x})$ tel que

$$\lambda_n(x_{n+1} - x_n) + T_1(x_{n+1}) + T_2(x_n) \ni \bar{p}.$$

En particulier, on établit que

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\| \leq \gamma\|x_n - \bar{x}\| \quad \text{pour tout } n. \tag{4.23}$$

Puisque $\gamma < 1$, la suite (x_n) converge linéairement vers $\bar{x}$. □

Dans le chapitre 2, nous avons vu qu'une application multivoque $T : X \rightrightarrows Y$ a la propriété d'Aubin en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si et seulement si elle est pseudo H-différentiable strictement en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $H : X \rightrightarrows Y$ définie par $H(w) := [\operatorname{lip} T(\bar{x}|\bar{y})]\|w\|I\!\!B$ (voir Proposition 2.1.20). On en déduit donc le corollaire suivant dont la démonstration découle naturellement de la preuve de la Proposition 2.1.20.

Corollaire 4.4.2. *Soit $T_1 : X \rightrightarrows X$ et $T_2 : X \rightrightarrows X$ deux applications multivoques et X un espace de Banach. On suppose que* $\operatorname{gph} T_i$ *est localement fermé en $(\bar{x}, \overline{y}_i)$ (pour $i = 1, 2$) et que T_1^{-1} a la propriété d'Aubin en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$. On suppose de plus que T_2 est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ relativement à l'ouvert $D \subset \operatorname{dom} T_2$ avec la constante κ_2 telle que $\kappa_2 \operatorname{lip} T_1^{-1}(\overline{y}_1|\bar{x}) < \gamma$ pour $\gamma \in]0, 1[$. Alors il existe un voisinage Ω de $\bar{x}$ tel que pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe une suite (x_n) engendrée par l'algorithme* (4.8) *qui converge linéairement vers $\bar{x}$.*

Nous avons également mentionné dans le premier chapitre qu'une application multivoque avait la propriété d'Aubin au voisinage d'un point $(\bar{y}, \bar{x})$, si et seulement si son application inverse était métriquement régulière en $(\bar{x}, \bar{y})$, on peut donc en conclure que le corollaire précédent reste valable en remplaçant "T_1^{-1} a la propriété d'Aubin en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$" par "T_1 est métriquement régulière en $\bar{x}$ pour $\overline{y}_1$."

Nous examinons maintenant le cas où l'inclusion (4.3) admet une solution isolée $\bar{x}$. Cela correspond au cas où T_1^{-1} admet une localisation graphique en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$ univoque et lipschitzienne. Il s'agit donc là d'un renforcement des hypothèses du Corollaire 4.4.2.

Corollaire 4.4.3. *Soit T_1 et T_2 deux applications multivoques. On suppose que* $\operatorname{gph} T_i$ *est localement fermé en* $(\bar{x}, \overline{y}_i)$ *(pour* $i = 1, 2$*) et que* T_1^{-1} *admet une localisation graphique en* $\overline{y}_1$ *pour* $\bar{x}$ *qui est univoque et lipschitzienne. On suppose de plus que* T_2 *est lipschitzienne extérieurement en* $\bar{x}$ *relativement à l'ouvert* $D \subset \operatorname{dom} T_2$ *avec la constante* κ_2 *telle que* $\kappa_2 \operatorname{lip} T_1^{-1}(\overline{y}_1 \,|\, \bar{x}) < \gamma$ *pour* $\gamma \in]0, 1[$. *Alors il existe un voisinage* Ω *de* $\bar{x}$ *tel que pour tout* $x_0 \in \Omega$ *il existe une unique suite* (x_n) *engendrée par l'algorithme* (4.8) *qui converge linéairement vers* $\bar{x}$.

Démonstration. Comme T_1^{-1} admet une localisation graphique en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$, univoque et lipschitzienne, il existe des constantes positives a, b et κ telles que l'application $y \mapsto T_1^{-1}(y) \cap I\!B_a(\bar{x})$ soit univoque sur $I\!B_b(\overline{y}_1)$ et lipschitzienne de constante κ, vérifiant les mêmes hypothèses que dans le Théorème 4.4.1.
La constante a satisfait aux mêmes hypothèses que dans la preuve du Théoreme 4.4.1, *i.e.,* $(2\lambda + \kappa_2)a \leq b$ et $I\!B_a(\bar{x}) \subset U \cap D$, λ, κ_2 et U étant définies dans la preuve du Théoreme 4.4.1.

Ainsi par le Théorème 4.4.1, pour tout $x_0 \in I\!B_a(\bar{x})$ il existe une suite (x_n) engendrée par l'algorithme (4.8) qui est linéairement convergente vers $\bar{x}$.
Afin d'achever la preuve, il reste à prouver l'unicité de cette suite.
Supposons que pour x_n donné, il existe deux points x_{n+1} et u_{n+1}, dans $I\!B_a(\bar{x})$, obtenus par l'algorithme (4.8).
T_2 étant lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$, on a pour tout $x \in X$,

$$T_2(x) \subset T_2(\bar{x}) + \kappa_2 \|x - \bar{x}\| I\!B.$$

Par suite, il existe $z_n \in T_2(x_n)$ tel que $z_n \in \{\overline{y}_2\} + \kappa_2 \|x_n - \bar{x}\| I\!B$, et donc,

$$\|z_n - \overline{y}_2\| \leq \kappa_2 \|x_n - \bar{x}\|,$$

ce qui équivaut à

$$\|z_n + \overline{y}_1 - \bar{p}\| \leq \kappa_2 \|x_n - \bar{x}\|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|\lambda_n(x_n - u_{n+1}) - z_n + \bar{p} - \overline{y}_1\| &\leq \|\lambda_n(x_n - u_{n+1})\| + \|z_n + \overline{y}_1 - \bar{p}\| \\
&\leq \lambda_n\|x_n - \bar{x}\| + \lambda_n\|\bar{x} - u_{n+1}\| + \|z_n + \overline{y}_1 - \bar{p}\| \\
&\leq (2\lambda_n + \kappa_2)a \leq b.
\end{aligned}$$

Un argument similaire nous permet d'écrire que

$$\|\lambda_n(x_n - u_{n+1}) - z_n + \bar{p} - \overline{y}_1\| \leq b.$$

Par suite, en utilisant le caractère univoque de la localisation graphique de T_1^{-1}, on obtient

$$u_{n+1} = T_1^{-1}(\lambda_n(x_n - u_{n+1}) - z_n + \bar{p}) \cap I\!B_a(\bar{x}),$$

et

$$x_{n+1} = T_1^{-1}(\lambda_n(x_n - x_{n+1}) - z_n + \bar{p}) \cap I\!B_a(\bar{x}).$$

En conséquence, T_1^{-1} étant lipschitzienne, on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= e\Big(T_1^{-1}(\lambda_n(x_n - x_{n+1}) - z_n + \bar{p}) \cap I\!B_a(\bar{x}), \\
&\qquad\qquad T_1^{-1}(\lambda_n(x_n - u_{n+1}) - z_n + \bar{p}) \cap I\!B_a(\bar{x})\Big) \\
&\leq \kappa\lambda_n\|x_{n+1} - u_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

En outre, grâce aux hypothèses formulées sur κ (voir Théorème 4.4.1) on a pour tout n,

$$\kappa\lambda_n \leq \kappa\lambda < \kappa(1+\gamma)\lambda < \gamma < 1,$$

il s'en suit que

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| < \|x_{n+1} - u_{n+1}\|,$$

ce qui est absurde, et donc la suite (x_n) est unique. $\square$

Comme pour le corollaire précédent, remarquons que l'hypothèse sur T_1^{-1} est équivalente à l'hypothèse de régularité métrique forte de T_1 d'après le Théorème 1.2.19 du premier chapitre.

Passons maintenant à l'étude de notre problème de convergence sous une hypothèses de H-différentiabilité un peu plus faible, la pseudo H-différentiabilité extérieure.

4.5 Algorithme de Forward-backward splitting sous des conditions de pseudo H-différentiabilité extérieure

Sous l'hypothèse plus faible de pseudo H-différentiabilité extérieure sur T_1^{-1} nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.5.1. *Supposons que T_1^{-1} soit pseudo H-différentiable extérieurement en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$ avec $T_1^{-1}(\overline{y}_1) = \{\bar{x}\}$ et que T_2 soit lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ relativement à un ouvert $D \subset \operatorname{dom} T_2$ avec la constante κ_2. Supposons de plus qu'il existe une constante $\kappa \geq 0$ telle que $|H|^+ \leq \kappa$ et $\kappa(1+\kappa_2) < 1$. Alors il existe un voisinage Ω de $\bar{x}$ tel que toute suite (x_n) engendrée par l'algorithme (4.8), et dont les éléments restent dans Ω, converge linéairement vers la solution $\bar{x}$ du problème (4.3).*

Démonstration. Fixons $\delta > 0$. L'application T_1^{-1} étant pseudo H-différentiable, il existe des réels positifs a et b tels que

$$T_1^{-1}(y) \cap \mathbb{B}_a(\bar{x}) \subset \{\bar{x}\} + H(y - \overline{y}_1) + \delta|y - \overline{y}_1|\mathbb{B} \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{B}_b(\overline{y}_1). \tag{4.24}$$

De plus, comme $|H|^+ < \infty$, il existe une constante $\kappa \geq 0$ telle que

$$H(x) \subset \kappa\|x\|\mathbb{B}, \quad \text{pour tout} \quad x \in X. \tag{4.25}$$

Considérons une suite (x_n), engendrée par l'algorithme (4.8), dont tous les éléments sont dans $\mathbb{B}_a(\bar{x})$, alors

$$\lambda_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + T_1(x_n) + T_2(x_{n-1}) \ni p, \quad \text{pour tout} \;\; n \geq 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il existe $z_{n-1} \in T_2(x_{n-1})$ tel que

$$T_1(x_n) \ni \lambda_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - z_{n-1} + p.$$

En conséquence, $x_n \in T_1^{-1}(\lambda_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - z_{n-1} + p)$.

L'application T_2 étant lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ relativement à $D \subset$ dom T_2 de constante κ_2, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que

$$T_2(x) \subset \overline{y}_2 + \kappa_2 \|x - \bar{x}\| I\!B, \quad \text{pour tout} \quad x \in U \cap D.$$

En prenant a plus petit si nécessaire on suppose que $I\!B_a(\bar{x}) \subset U \cap D$.
Par suite,

$$\|z_{n-1} - \overline{y}_2\| \leq \kappa_2 \|x_{n-1} - \bar{x}\|. \tag{4.26}$$

En outre,

$$\|\lambda_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - z_{n-1} + p - \overline{y}_1\| \leq \lambda_{n-1}\|x_{n-1} - x_n\| + \|\overline{y}_2 - z_{n-1}\|.$$

Ainsi l'inégalité (4.26), implique que

$$\|\lambda_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - z_{n-1} + p - \overline{y}_1\| \leq (2\lambda + \kappa_2)a \leq b,$$

et donc,

$$\lambda_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - z_{n-1} + p \in I\!B_b(\overline{y}_1).$$

Donc l'inclusion (4.24) implique

$$x_n - \bar{x} \in H(\lambda_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - z_{n-1} + p - \overline{y}_1) + \delta\|\lambda_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - z_{n-1} + p - \overline{y}_1\| I\!B.$$

En utilisant l'hypothèse (4.25), et la convexité de la boule, on obtient

$$x_n - \bar{x} \subset (\kappa + \delta)\|\lambda_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - z_{n-1} + p - \overline{y}_1\| I\!B. \tag{4.27}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|x_n - \bar{x}\| &\leq (\kappa + \delta)\|z_{n-1} - \overline{y}_2\| + (\kappa + \delta)\lambda_{n-1}\|x_{n-1} - x_n\| \\ &\leq (\kappa + \delta)\kappa_2\|x_{n-1} - \bar{x}\| + (\kappa + \delta)\lambda_{n-1}\|x_{n-1} - \bar{x}\| + (\kappa + \delta)\lambda_{n-1}\|x_n - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

Alors

$$(1 - (\kappa + \delta)\lambda_{n-1})\|x_n - \bar{x}\| \leq (\kappa + \delta)(\kappa_2 + \lambda_{n-1})\|x_{n-1} - \bar{x}\|$$

et donc

$$\|x_n - \bar{x}\| \leq \frac{\kappa + \delta}{1 - (\kappa + \delta)\lambda_{n-1}} (\kappa_2 + \lambda_{n-1}) \|x_{n-1} - \bar{x}\|,$$

et

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\|x_n - \bar{x}\|}{\|x_{n-1} - \bar{x}\|} < 1.$$

Cette dernière inégalité nous fournit la convergence linéaire de (x_n) vers $\bar{x}$. $\square$

De même qu'il y a équivalence entre la propriété d'Aubin et la pseudo H-différentiabilité stricte avec $H(w) := [\operatorname{lip} T(\bar{x}|\bar{y})] \|w\| \mathbb{B}$, on montre facilement qu'il y a équivalence entre une application multivoque isolément calme et une application pseudo H-différentiable extérieurement. On obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 4.5.2. *Supposons que l'application T_1^{-1} soit isolément calme en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$ pour une constante $\kappa \geq 0$ et telle que $T_1^{-1}(\overline{y}_1) = \{\bar{x}\}$. On suppose également T_2 lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ relativement à un ouvert $D \subset \operatorname{dom} T_2$ pour une constante κ_2 vérifiant $\kappa(1 + \kappa_2) < 1$. Alors il existe un voisinage Ω de $\bar{x}$ tel que toute suite (x_n) engendrée par l'algorithme* (4.8)*, et dont les éléments restent dans Ω, converge linéairement vers la solution $\bar{x}$ du problème* (4.3)*.*

L'application T_1^{-1} étant isolément calme en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$, on sait d'après la Proposition 1.2.17 du Chapitre 1, que T_1 est fortement métriquement sous régulière en $\bar{x}$ pour $\overline{y}_1$ et donc que le corollaire précédent peut être reformulé en termes de régularité métrique forte de l'application T_1.

Maintenant que nous avons présenté et démontré nos résultats de convergence de l'algorithme de forward-backward splitting pour la résolution de l'inclusion $(T_1 + T_2) \ni \bar{p}$ sous des hypothèses de pseudo H-différentiabilité de l'application T_1^{-1} (ou comme nous l'avons vu, des hypothèses de régularité métrique), présentons quelques applications de ces théorèmes et corollaires.

4.6 Applications

Dans cet ultime paragraphe nous allons montrer, à travers quelques exemples, comment les théorèmes obtenus précedemment constituent - dans un certain sens -

une unification d'une série de résultats de convergence dédiés à la résolution d'inclusions variationnelles.
Plus précisément nous donnons au lecteur une idée du vaste champ d'application de nos résultats en considérant successivement la méthode du point proximal, un problème de point fixe d'une application multivoque, la résolution d'équations généralisées et enfin un problème d'optimisation.

4.6.1 Méthode du point proximal pour les applications strictement pseudo H-différentiable

Nous sommes ici dans le cas particulier où $T_2 = 0$ et $\bar{p} = 0$ dans notre problème (4.1). On s'intéresse donc à la résolution de l'inclusion

$$T_1(x) \ni 0. \tag{4.28}$$

L'algorithme (4.8) se ramène alors à la méthode classique du point proximal

$$\lambda_n(x_{n+1} - x_n) + T_1(x_{n+1}) \ni 0 \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

pour résoudre (4.28), avec T_1^{-1} strictement pseudo H-différentiable en un point de référence.

Notre Théorème 4.4.1 devient :

Théorème 4.6.1. *Soit $\bar{x}$ tel que $T_1(\bar{x}) \ni 0$ et T_1^{-1} strictement pseudo H-différentiable en 0 pour $\bar{x}$, où H est telle que $|H|^+ < \infty$ (i.e. $\exists \kappa > 0$ tel que $H(x) \subset \kappa \|x\| I\!B$ pour tout $x \in X$). On suppose de plus $\operatorname{gph} T_1$ localement fermé en $(\bar{x}, 0)$.*
Alors il existe un voisinage Ω de $\bar{x}$ tel que pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une suite (x_n) engendrée par l'algorithme du point proximal qui converge linéairement vers $\bar{x}$.

La relation (4.11) de la preuve du Théorème 4.4.1 devient

$$\frac{\lambda_n(\kappa + \delta)}{1 - (\kappa + \delta)\lambda_n} < \gamma < 1.$$

En 2008, dans leur article [1] concernant la convergence de la méthode du point proximal pour les applications métriquement régulières, Aragón, Dontchev et Geoffroy ont obtenu le résultat de convergence suivant :

Théorème 4.6.2. *Soit $T : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $\bar{x}$ une solution de l'inclusion $T(x) \ni 0$. Supposons que* $\operatorname{gph} T$ *est localement fermé en $(\bar{x}, 0)$ et que T est métriquement régulière en $\bar{x}$ pour* 0. *On choisit une suite de fonctions (g_n) telles que $g_n : X \to Y$ et $g_n(0) = 0$ pour tout n, et telles que g_n lipchitzienne dans un voisinage U de* 0 *(le même pour tout n), avec la constante de Lipschitz λ_n vérifiant*

$$\sup_n \lambda_n < \frac{1}{2 reg T(\bar{x}|0)}.$$

Alors il existe un voisinage O de $\bar{x}$ tel que pour tout $x_0 \in O$, il existe une suite (x_n) engendrée par l'algorithme du point proximal

$$g_n(x_{n+1} - x_n) + T(x_{n+1}) \ni 0 \quad \textit{pour } n = 0, 1, 2, ...$$

qui soit linéairement convergente vers $\bar{x}$. De plus, si (g_n) est choisie telle que $\lambda_n \to 0$, alors pour tout $x_0 \in O$ il existe une suite (x_n) engendrée par l'algorithme précédent qui converge superlinéairement vers $\bar{x}$.

Connaissant le lien étroit entre l'hypothèse de pseudo H-différentiabilité stricte de T_1^{-1} en 0 pour $\bar{x}$ et la régularité métrique de T_1 en $\bar{x}$ pour 0 et en posant $Y = X$ et $g_n(u) = \lambda_n u$, on constate la similitude des deux résultats. Le second étant bien entendu plus général que le premier.

Pour plus de résultats sur la convergence de l'algorithme du point proximal sous des conditions différentes (hypothèses de monotonie notamment), on peut se réferrer par exemple aux articles de Lemaire [57] et de Rockafellar [87].

4.6.2 Problèmes de points fixes pour les applications strictement pseudo H-différentiable

La recherche d'un point fixe de l'application $T_1 : X \rightrightarrows X$ consiste à résoudre :

$$T_1(x) \ni x, \tag{4.29}$$

ce qui revient à résoudre notre problème (4.1) avec $T_2 = -Id$ et $\bar{p} = 0$.

L'application $-Id$ étant clairement lipschitzienne et donc lipschitzienne extérieurement, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.6.3. *Soit* $T_1 : X \rightrightarrows X$ *pseudo* H*-différentiable strictement en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{x}$*, où* H *est telle que* $|H|^+ < \infty$ *(i.e.* $\exists \kappa > 0$ *tel que* $H(x) \subset \kappa \|x\| \mathbb{B}$ *pour tout* $x \in X$*). On suppose de plus* $\operatorname{Gph} \mathrm{T}_1$ *localement fermé en* $(\bar{x}, \bar{x})$*.*
Alors il existe un voisinage Ω *de* $\bar{x}$ *tel que pour tout* $x_0 \in \Omega$*, il existe une suite* (x_n) *engendrée par*

$$\lambda_n(x_{n+1} - x_n) + T_1(x_{n+1}) - x_n \ni 0, \quad \textit{pour} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

qui converge linéairement vers $\bar{x}$*.*

Dans ce cas, la relation (4.11) de la preuve du Théorème 4.4.1 devient

$$\frac{(\lambda_n + 1)(\kappa + \delta)}{1 - (\kappa + \delta)\lambda_n} < \gamma < 1.$$

Dans son article [40], Geoffroy obtient une convergence superlinéaire en appliquant l'algorithme du point proximal à l'application $T_1 - Id$, où T_1 est supposé métriquement régulière (ce qui implique que $T_1 - Id$ est aussi métriquement régulière), pour résoudre le problème (4.29).

4.6.3 Equations généralisées

On considère maintenant l'équation généralisée

$$T_1(x) + f(x) \ni 0 \tag{4.30}$$

L'équation généralisée (4.30), correspond au cas où $T_2 = f$ et $\bar{p} = 0$ dans l'inclusion (4.1). Et dans ce cas l'algorithme (4.8) devient

$$\lambda_n(x_{n+1} - x_n) + T_1(x_{n+1}) + f(x_n) \ni 0 \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

La fonction f étant univoque, l'hypothèse T_2 lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ relativement à l'ouvert $D \subset \operatorname{dom} T_2$ avec la constante κ_2, peut se réduire à f calme en $\bar{x}$ relativement à l'ouvert D.

Rappelons que l'application f est dite calme en $\bar{x}$ relativement à un ouvert D si $\bar{x} \in D \cap \operatorname{dom} f$ et s'il existe une constante κ_2 telle que

$$\|f(x) - f(\bar{x})\| \leq \|x - \bar{x}\| \quad \text{pour tout} \quad x \in D \cap \operatorname{dom} f.$$

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 4.6.4. *Soit T_1 une application multivoque telle que $\operatorname{gph} T_1$ soit localement fermé en $(\bar{x}, \overline{y}_1)$ et T_1^{-1} pseudo H-différentiable strictement en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$, où H est telle que $|H|^+ < \infty$ (i.e. $\exists \kappa > 0$ tel que $H(x) \subset \kappa \|x\| I\!\!B$ pour tout $x \in X$). On suppose de plus que f est calme en $\bar{x}$ relativement à l'ouvert $D \subset \operatorname{dom} f$ avec la constante κ_2 telle que $\kappa_2 \kappa < \gamma$ pour $\gamma \in]0, 1[$. Alors il existe un voisinage Ω de $\bar{x}$ tel que pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe une suite (x_n) engendrée par l'algorithme* (**??**) *qui converge linéairement vers $\bar{x}$.*

Ici, la relation (4.11) de la preuve du Théorème 4.4.1 reste inchangée.

4.6.4 Problèmes d'optimisation

Soit H un espace de Hilbert, on considère le problème d'optimisation :

$$\min f(x) \quad \text{tel que} \quad x \in K. \tag{4.31}$$

où $K \subset H$ est convexe polyédral et $f : H \to H$ est une fonction convexe semi-continue inférieurement.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ soit solution du problème (4.31) est

$$\partial f(\bar{x}) + N_K(\overline{x}) \ni 0,$$

où ∂f représente le sous-différentiel de la fonction f qui est défini par

$$\partial f(x) := \{u \in H | \langle u, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \ \forall y \in H\},$$

et $N_K(\bar{x})$ désigne le cône normal à K, au point $\bar{x}$, défini par

$$N_K(\bar{x}) := \{v \in H | \langle v, x' - \bar{x} \rangle \leq 0, \ \forall x' \in K\}.$$

Lorsque $\bar{x} \notin K$, on prend $N_K(\bar{x}) = \emptyset$.

D'après les résultats de Aragón Artacho et Geoffroy [3], si certaines conditions de croissance quadratique sont vérifiées localement par f (au voisinage de $\bar{x}$) alors ∂f est fortement métriquement régulière :

Proposition 4.6.5. *Soit f une fonction propre, convexe et semie continue inférieurement, définie d'un espace de Hilbert H dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, et soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des points de H tels que $\bar{y} \in \partial f$. Alors ∂f est fortement métriquement sous régulière en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si et seulement s'il existe un voisinage U de $\bar{x}$ et une constante positive k tels que $f(x) \geq f(\bar{x}) - \langle \bar{y}, \bar{x} - x \rangle + k\|x - \bar{x}\|^2$ lorsque $x \in U$.*

Ainsi sous ces mêmes conditions ∂f^{-1} est isolément calme. De plus K étant convexe polyédral, $N_K : H \rightrightarrows H$ est lipschitzienne, donc lipschitzienne extérieurement, résultat démontré par Walkup et Wets [93] en 1969 et dont on peut trouver une démonstration également dans le livre de Dontchev et Rockafellar [29].

Proposition 4.6.6. *Soit $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ une application multivoque. Si l'application F est convexe et polyédrale alors elle est lipschitzienne relativement à son domaine.*

On peut ainsi adapter le Corollaire 4.5.2 afin de résoudre (4.31). On obtient le résultat suivant

Théorème 4.6.7. *Soit $f : H \to H$ une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement et soit $\bar{x} \in H$. Supposons qu'il existe un voisinage U de $\bar{x}$ et une constante positive k tels que l'application f vérifie l'inégalité*
$f(x) \geq f(\bar{x}) - \langle \overline{y}_1, \bar{x} - x \rangle + k\|x - \bar{x}\|^2$ lorsque $x \in U$ (ce qui entraîne qu'il existe une constante $\kappa \geq 0$ telle que ∂f^{-1} soit isolément calme en $\overline{y}_1$ pour $\bar{x}$). On suppose de plus que le sous-ensemble $K \subset H$ est convexe et polyédral (ce qui implique qu'il existe une constante κ_2 telle que l'application $N_K : H \rightrightarrows H$ soit lipschitzienne extérieurement). Les constantes κ et κ_2 vérifient l'inégalité $\kappa(1 + \kappa_2) < 1$. Alors il existe un voisinage Ω de $\bar{x}$ tel que toute suite (x_n) engendrée par l'algorithme (4.8), et dont les éléments restent dans Ω, converge linéairement vers la solution $\bar{x}$ du problème (4.31).

Index

Bibliographie

[1] F. J. Aragón Artacho, A. L. Dontchev, and M. H. Geoffroy. Convergence of the proximal point method for metrically regular mappings. In *CSVAA 2004—control set-valued analysis and applications*, volume 17 of *ESAIM Proc.*, pages 1–8. EDP Sci., Les Ulis, 2007.

[2] F. J. Aragón Artacho and M. H. Geoffroy. Uniformity and inexact version of a proximal method for metrically regular mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 335(1) :168–183, 2007.

[3] F. J. Aragón Artacho and M. H. Geoffroy. Characterization of metric regularity of subdifferentials. *J. Convex Anal.*, 15(2) :365–380, 2008.

[4] H. Attouch, J. L. Ndoutoume, and M. Théra. Epigraphical convergence of functions and convergence of their derivatives in Banach spaces. *Sém. Anal. Convexe*, 20 :Exp. No. 9, 45, 1990.

[5] J.-P. Aubin. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions. In *Mathematical analysis and applications, Part A*, volume 7 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 159–229. Academic Press, New York, 1981.

[6] J.-P. Aubin. Comportement lipschitzien des solutions de problèmes de minimisation convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 295(3) :235–238, 1982.

[7] J.-P. Aubin. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems. *Math. Oper. Res.*, 9(1) :87–111, 1984.

[8] J.-P. Aubin and TITLE = Set-valued analysis SERIES = Systems & Control : Foundations & Applications VOLUME = 2 PUBLISHER = Birkhäuser Boston

Inc. ADDRESS = Boston, MA YEAR = 1990 PAGES = xx+461 ISBN = 0-8176-3478-9 MRCLASS = 49-02 (26-02 28-02 46-02 47H15 49J52 58C06 90C48) MRNUMBER = MR1048347 (91d :49001) MRREVIEWER = Leszek Zaremba Frankowska, H.

[9] D. Azé and J.-P. Penot. On the dependence of fixed point sets of pseudo-contractive multifunctions. Application to differential inclusions. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 6(1) :31–47, 2006.

[10] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires.* Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. Reprint of the 1932 original.

[11] M. Baronti and P. L. Papini. Convergence of sequences of sets. In *Methods of functional analysis in approximation theory (Bombay, 1985)*, volume 76 of *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, pages 135–155. Birkhäuser, Basel, 1986.

[12] G. Beer, A. Lechicki, S. Levi, and S. Naimpally. Distance functionals and suprema of hyperspace topologies. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 162 :367–381, 1992.

[13] TITLE = Topologies on closed and closed convex sets SERIES = Mathematics and its Applications VOLUME = 268 PUBLISHER = Kluwer Academic Publishers Group ADDRESS = Dordrecht YEAR = 1993 PAGES = xii+340 ISBN = 0-7923-2531-1 MRCLASS = 49-02 (46A99 46B99 46N10 49J45 54-01 90C31) MRNUMBER = MR1269778 (95k :49001) MRREVIEWER = P. S. Kenderov Beer, G.

[14] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. A. Sagastizábal. *Numerical optimization.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Theoretical and practical aspects, Translated and revised from the 1997 French original.

[15] B. Brogliato, A. Daniilidis, C. Lemaréchal, and V. Acary. On the equivalence between complementarity systems, projected systems and differential inclusions. *Systems Control Lett.*, 55(1) :45–51, 2006.

[16] Ronald E. Bruck, Jr. An iterative solution of a variational inequality for certain monotone operators in Hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81(5) :890–892, 1975.

[17] C. Cabuzel and A. Piétrus. Solving variational inclusions by a multipoint iteration method under center-Hölder continuity conditions. *Appl. Math. (Warsaw)*, 34(4) :493–503, 2007.

[18] C. Castaing. Sur les équations différentielles multivoques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 263 :A63–A66, 1966.

[19] G. H.-G. Chen and R. T. Rockafellar. Convergence rates in forward-backward splitting. *SIAM J. Optim.*, 7(2) :421–444, 1997.

[20] F. H. Clarke. Generalized gradients and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205 :247–262, 1975.

[21] C. Combari and L. Thibault. On the graph convergence of subdifferentials of convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(8) :2231–2240, 1998.

[22] P. L. Combettes. Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators. *Optimization*, 53(5-6) :475–504, 2004.

[23] R. Deville. Stability of subdifferentials of nonconvex functions in Banach spaces. *Set-Valued Anal.*, 2(1-2) :141–157, 1994. Set convergence in nonlinear analysis and optimization.

[24] A. L. Dontchev and W. W. Hager. Lipschitzian stability in nonlinear control and optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 31(3) :569–603, 1993.

[25] A. L. Dontchev and W. W. Hager. An inverse mapping theorem for set-valued maps. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121(2) :481–489, 1994.

[26] A. L. Dontchev, A. S. Lewis, and R. T. Rockafellar. The radius of metric regularity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(2) :493–517 (electronic), 2003.

[27] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar. Characterizations of strong regularity for variational inequalities over polyhedral convex sets. *SIAM J. Optim.*, 6(4) :1087–1105, 1996.

[28] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar. Regularity and conditioning of solution mappings in variational analysis. *Set-Valued Anal.*, 12(1-2) :79–109, 2004.

[29] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar. *Implicit functions and solution mappings.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, 2009. A view from variational analysis.

[30] J. Douglas, Jr. and H. H. Rachford, Jr. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82 :421–439, 1956.

[31] F. Facchinei and J.-S. Pang. *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. Vol. I.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2003.

[32] M. C. Ferris and J.-S. Pang. Engineering and economic applications of complementarity problems. *SIAM Rev.*, 39(4) :669–713, 1997.

[33] A. F. Filippov. Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side. *SIAM J. Control*, 5 :609–621, 1967.

[34] A. Fischer. Local behavior of an iterative framework for generalized equations with nonisolated solutions. *Math. Program.*, 94(1, Ser. A) :91–124, 2002.

[35] B. Fisher. Common fixed points of mappings and set-valued mappings. *Rostock. Math. Kolloq.*, (18) :69–77, 1981.

[36] B. Fisher. A reformulation of the Hausdorff metric. *Rostock. Math. Kolloq.*, (24) :71–75, 1983.

[37] M. Frigon. Systems of first order differential inclusions with maximal monotone terms. *Nonlinear Anal.*, 66(9) :2064–2077, 2007.

[38] D. Gabay. *Applications of the method of multipliers to variational inequalities, in Augmented Lagrangian methods, M. Fortin and R. Glowinski, eds., North-Holland,.*

[39] M. Gaydu. *Développements autour de la résolution d'inclusions variationnelles métriquement régulières.* PhD thesis, Université des Antilles et de la Guyane, 2010.

[40] M. H. Geoffroy. Approximation of fixed points of metrically regular mappings. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 27(5-6) :565–581, 2006.

[41] M. H. Geoffroy. Stability of Mann's iterates under metric regularity. *Appl. Math. Comput.*, 215(2) :686–694, 2009.

[42] M. H. Geoffroy, C. Jean-Alexis, and A. Piétrus. Iterative solving of variational inclusions under Wijsman perturbations. *J. Global Optim.*, 42(1) :111–120, 2008.

[43] M. H. Geoffroy and M. Lassonde. Stability of slopes and subdifferentials. *Set-Valued Anal.*, 11(3) :257–271, 2003.

[44] M. H. Geoffroy and G. Pascaline. Generalized differentiation and fixed points sets behaviors with respect to Fisher convergence. *A paraître.*

[45] M. H. Geoffroy and G. Pascaline. Successive approximations of the sum of non monotone operators. *Prepublication.*

[46] A. A. Goldstein. Convex programming in Hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 :709–710, 1964.

[47] S. Haubruge, V. H. Nguyen, and J. J. Strodiot. Convergence analysis and applications of the Glowinski-Le Tallec splitting method for finding a zero of the sum of two maximal monotone operators. *J. Optim. Theory Appl.*, 97(3) :645–673, 1998.

[48] F. Hausdorff. Beweis eines Satzes von Arzelà. *Math. Z.*, 26(1) :135–137, 1927.

[49] X.-F. He, J. Lou, and Z. He. Iterative methods for solving variational inclusions in Banach spaces. *J. Comput. Appl. Math.*, 203(1) :80–86, 2007.

[50] H. Hermes. The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t, x)$. *Advances in Math.*, 4 :149–169 (1970), 1970.

[51] S. Hilout, C. Jean-Alexis, and A. Piétrus. On the secant and Steffensen's methods for variational inclusions. In *Progress in nonlinear analysis research*, pages 269–283. Nova Sci. Publ., New York, 2009.

[52] A. D. Ioffe. Nonsmooth analysis : differential calculus of nondifferentiable mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 266(1) :1–56, 1981.

[53] A. D. Ioffe. Single-valued representation of set-valued mappings. II. Application to differential inclusions. *SIAM J. Control Optim.*, 21(4) :641–651, 1983.

[54] A. D. Ioffe. Metric regularity and subdifferential calculus. *Uspekhi Mat. Nauk*, 55(3(333)) :103–162, 2000.

[55] A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov. *Theory of extremal problems*, volume 6 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. Translated from the Russian by Karol Makowski.

[56] C. Jean-Alexis. *Diverses méthodes de résolution d'inclusions variationnelles*. PhD thesis, Université des Antilles et de la Guyane, 2007.

[57] B. Lemaire. The proximal algorithm. In *New methods in optimization and their industrial uses (Pau/Paris, 1987)*, volume 87 of *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, pages 73–87. Birkhäuser, Basel, 1989.

[58] B. Lemaire. An asymptotical variational principle associated with some differential inclusions—continuous and discrete cases. *Southeast Asian Bull. Math.*, 19(3) :59–64, 1995.

[59] D. Leventhal. Metric subregularity and the proximal point method. *J. Math. Anal. Appl.*, 360(2) :681–688, 2009.

[60] T.-C. Lim. On fixed point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 110(2) :436–441, 1985.

[61] P.-L. Lions. Une méthode itérative de résolution d'une inéquation variationnelle. *Israel J. Math.*, 31(2) :204–208, 1978.

[62] P.-L. Lions and B. Mercier. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. *SIAM J. Numer. Anal.*, 16(6) :964–979, 1979.

[63] W. R. Mann. Mean value methods in iteration. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 :506–510, 1953.

[64] J. T. Markin. Continuous dependence of fixed point sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38 :545–547, 1973.

[65] J. T. Markin. Stability of solution sets for generalized differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 46 :289–291, 1974.

[66] B. Martinet. Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives. *Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle*, 4(Ser. R-3) :154–158, 1970.

[67] B. S. Mordukhovich. Maximum principle in the problem of time optimal response with nonsmooth constraints. *Prikl. Mat. Meh.*, 40(6) :1014–1023, 1976.

[68] B. S. Mordukhovich. Metric approximations and necessary conditions for optimality for general classes of nonsmooth extremal problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 254(5) :1072–1076, 1980.

[69] B. S. Mordukhovich. Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 340(1) :1–35, 1993.

[70] S. B. Nadler, Jr. Multi-valued contraction mappings. *Pacific J. Math.*, 30 :475–488, 1969.

[71] P. Nistri and M. Quincampoix. On the dynamics of a differential inclusion built upon a nonconvex constrained minimization problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 124(3) :659–672, 2005.

[72] M. A. Noor. Three-step iterative algorithms for multivalued quasi variational inclusions. *J. Math. Anal. Appl.*, 255(2) :589–604, 2001.

[73] J. C.H. Pang. Generalized differentiation with positively homogeneous maps : Applications in set-valued analysis and metric regularity. *To appear.*

[74] N. S. Papageorgiou. Convergence theorems for fixed points of multifunctions and solutions of differential inclusions in Banach spaces. *Glas. Mat. Ser. III*, 23(43)(2) :247–257, 1988.

[75] G. B. Passty. Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space. *J. Math. Anal. Appl.*, 72(2) :383–390, 1979.

[76] D. W. Peaceman and H. H. Rachford, Jr. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 3 :28–41, 1955.

[77] J.-P. Penot. Metric regularity, openness and Lipschitzian behavior of multifunctions. *Nonlinear Anal.*, 13(6) :629–643, 1989.

[78] J.-P. Penot. Miscellaneous incidences of convergence theories in optimization and nonlinear analysis. I. Behavior of solutions. *Set-Valued Anal.*, 2(1-2) :259–274, 1994. Set convergence in nonlinear analysis and optimization.

[79] D. Pompeiu. Sur la continuité des fonctions de variables complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (2)*, 7(3) :265–315, 1905.

[80] H. Poppe. Eine Bemerkung über Trennungsaxiome in Räumen von abgeschlossenen Teilmengen topologischer Räume. *Arch. Math. (Basel)*, 16 :197–199, 1965.

[81] H. Poppe. Einige Bemerkungen über den Raum der abgeschlossenen Mengen. *Fund. Math.*, 59 :159–169, 1966.

[82] S. M. Robinson. Normed convex processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 174 :127–140, 1972.

[83] S. M. Robinson. Some continuity properties of polyhedral multifunctions. *Math. Programming Stud.*, (14) :206–214, 1981. Mathematical programming at Oberwolfach (Proc. Conf., Math. Forschungsinstitut, Oberwolfach, 1979).

[84] S. M. Robinson. Solution continuity in monotone affine variational inequalities. *SIAM J. Optim.*, 18(3) :1046–1060 (electronic), 2007.

[85] R. T. Rockafellar. *Monotone processes of convex and concave type.* Memoirs of the American Mathematical Society, No. 77. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.

[86] R. T. Rockafellar. Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. *J. Math. Anal. Appl.*, 32 :174–222, 1970.

[87] R. T. Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM J. Control Optimization*, 14(5) :877–898, 1976.

[88] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational Analysis*, volume 317 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[89] P. Tseng. Applications of a splitting algorithm to decomposition in convex programming and variational inequalities. *SIAM J. Control Optim.*, 29(1) :119–138, 1991.

[90] R. S. Varga. *Matrix Iterative Analysis.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[91] L. Vietoris. Stetige Mengen. *Monatsh. Math. Phys.*, 31(1) :173–204, 1921.

[92] L. Vietoris. Bereiche zweiter Ordnung. *Monatsh. Math. Phys.*, 32(1) :258–280, 1922.

[93] D. W. Walkup and R. J.-B. Wets. A Lipschitzian characterization of convex polyhedra. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 23 :167–173, 1969.

[94] R. A. Wijsman. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123 :32–45, 1966.

[95] C. Y. Zhu. Asymptotic convergence analysis of the forward-backward splitting algorithm. *Math. Oper. Res.*, 20(2) :449–464, 1995.

Résumé

Dans cette thèse nous présentons dans un premier temps une nouvelle notion de différentiabilité généralisée pour les applications multivoques, faisant intervenir des applications positivement homogènes : la H-différentiabilité. Nous étudions la stabilité de cette notion en utilisant la convergence de Fisher, d'abord dédiée aux ensembles mais que nous avons adaptée aux applications multivoques. Nous nous intéressons ensuite à l'étude de la dépendance continue des ensembles de points fixes d'une application multivoque contractante par rapport aux données. Finalement nous analysons la convergence d'une méthode d'approximations successives de type forward-backward splitting, des zéros de la somme de deux opérateurs multivoques non monotones, jouissants notamment de propriétés de pseudo H-différentiabilité.

Abstract

In this thesis we present at first a new concept of generalized differentiation for set-valued mappings, involving positively homogeneous applications : the H-differentiability. We study the stability of this notion by using Fisher convergence, firstly dedicated to sets but which we have adapted to set-valued mappings. We establish the continuous dependence of fixed points sets of set-valued contraction and finally we study the convergence of a forward-backward splitting method for approximating the zeros of the sum of two non-monotone set-valued mappings, notably using properties of pseudo H-differentiability.